

離散力学系の Conley 指数と transition matrix 及びその応用

荒井 迅

京都大学大学院理学研究科

(email: arai@kusm.kyoto-u.ac.jp)

概要

Conley 指数と transition matrix の理論は連続力学系においてさまざまな応用を見出し
ている。本論文では離散力学系での transition matrix を構成し、その応用として homo-
clinic/heteroclinic 接触の発生が Conley 指数によりとらえられることを示す。

1 序

本論文では離散力学系における分岐現象を Conley 指数という位相幾何学的手法により研究する。力学系理論とは、微分方程式や差分方程式により数学的に表現された現象の時間発展を解析する、もしくはその手法を研究する分野である。本論文で扱う離散力学系の場合ならば、 $f: X \rightarrow X$ が与えられた時に状態 $x \in X$ の時間 $n \in \mathbb{Z}$ 後の状態が $f^n(x)$ であると思う。力学系の理論はその名の通り力学における成功を手本に発展してきたが、現在では物理学の枠を越えて幅広く用いられている。コンピュータによる数値解析の発達とともに広く認識されるようになったカオスと呼ばれる現象も、数学的には力学系の理論により研究されている。力学系の研究には様々な側面があるが、本論文において問題にするのは力学系の摂動による変化、すなわち分岐現象である。分岐とはパラメータの変化により X の点の f による軌道たちのなす位相構造が変化することを指すが、カオス的な力学系が単純な力学系からどのように分岐して発生するかなど重要な問題も多い。

このような研究に位相幾何学的手法を提供するのが Conley 指数の理論である。Conley 指数理論では、Morse 理論において Morse 関数の非退化臨界点に Morse 指数を与えたように、力学系の孤立不変集合に対して位相幾何学的な指数を対応させる。Conley 指数は、Charles Conley 本人とその共同研究者たちにより 1970 年代にまず連続力学系に対して定義された。その後、80 年代末ごろより離散力学系の場合での定義が Robbin-Salamon [23]、またそれとは独立に Mrozek [14] によりなされたが、90 年代の後半になって Szymczak [27] によるカテゴリー論的方法等でこれらの理論に対する統一的な見方が与えられた。

局所的な量である Morse 指数から多様体の大域的な情報が得られたように、孤立不変集合 S が Morse 成分と呼ばれる孤立不変部分集合たちとその間を結ぶ connecting orbit に分解されているときに、 S の Conley 指数と Morse 成分たちの Conley 指数を関係づけるのが connection matrix である。connection matrix の理論は連続力学系について Franzosa [6] により 90 年ごろまでに与えられていたが、その後 Richeson [20, 21] が前記 Szymczak らの結果をふまえ、離散力学系の場合に connection matrix pair として定義している。connection matrix によって代数的な議論により Morse 成分の間の connecting orbit の存在を示すことができるが、このような方法で存在の示せる connection は摂動に対して安定であることが Conley 指数の安定性からわかる。

それに対し、分岐現象により生じる不安定な connection を Conley 指数でとらえようとする試みが連続力学系において Reineck [19] によってなされた。その後、McCord-Mischaikow [11] がこの結果を整理し singular transition matrix として定式化している。

本論文では前記 Richeson の仕事を発展させ、Reineck の議論を離散力学系で再構成することにより、離散力学系に対しても singular transition matrix pair を定義できることを示す。その上でその理論を応用し、homoclinic/heteroclinic 接触の存在を Conley 指数の情報から示すことができることを見る。ここで問題になるのは、Conley 指数は C^0 位相での摂動で安定なので安定多様体と不安定多様体の接触という可微分構造についての情報はそれ自身では持っていないということである。そこで Conley 指数を用いて微分に関する議論をするために、もとの力学系の可微分構造から導かれる射影バンドルを導入し、その上で singular transition matrix pair を用いた解析を行なうことにより、Conley 指数と homoclinic/heteroclinic 接触の問題を関係づける。

本論文の構成は次のようになっている。§2, §3 は、Conley 指数および Morse 分解の filtration に、§4 は connection matrix にあてられている。これらの節は Franks-Richeson [5] および Richeson [20, 21] の結果を整理したものであり、省略した証明はこれらの論文にある。本論文の主要部は §5, §6 で、それぞれ transition matrix pair の構成、その homoclinic/heteroclinic 接触の問題への応用を議論している。

最後にこの論文の作成にあたり多岐にわたり指導して下さった国府寛司先生、四回生ゼミ以来いろいろとご心配をおかけした河野明先生、原田雅名先生への感謝を述べて序の結びとする。

2 離散 Conley 指数

2.1 ホモトピー Conley 指数

本論文では、局所コンパクト距離空間 X とその上の連続写像 $f : X \rightarrow X$ のなす離散半力学系 (discrete semidynamical system) を扱う。 X の部分集合 Y の内部、閉包、境界をそれぞれ $\text{int } Y$, $\text{cl } Y$, ∂Y と書くことにする。また、 \emptyset は任意の位相空間のコンパクト部分集合であると約束する。

まずいくつか基本的な定義をしよう。 $x \in X$ を通る完全軌道とは、写像 $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow X$ であって $\sigma(0) = x$ かつ任意の $k \in \mathbb{Z}$ で $f(\sigma(k)) = \sigma(k+1)$ となるもののことを言う。いま f は可逆とは限らないので、 $x \in X$ に対し完全軌道は複数存在することも1つもないこともある。 $N \subset X$ に対し、

$$\text{Inv}(N, f) := \{x \in X \mid x \text{ を通る完全軌道 } \sigma \text{ で } \sigma(\mathbb{Z}) \subset N \text{ となるものが存在する} \}$$

とおく。また、正負両方向について長さ m の軌道を N 内に持つ点を $\text{Inv}^m(N, f)$ と書く。この集合は

$$\text{Inv}^m(N, f) = \{f^m(y) \mid f^0(y), \dots, f^{2m}(y) \in N\}$$

と書ける。 N がコンパクトならば次の自然な命題が成り立つ。

命題 2.1. $N \subset X$ をコンパクト集合とすると、

$$\text{Inv}(N, f) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \text{Inv}^m(N, f).$$

定義 2.2. X のコンパクト部分集合 N は $\text{Inv}(N, f) \subset \text{int } N$ が成立するとき孤立近傍という。このとき $S := \text{Inv}(N, f)$ を N が孤立させる孤立不変集合といい、また N は S の孤立近傍であるという。

$S = \text{Inv}(N, f)$ がコンパクトであること、および f 不変、すなわち $f(S) = S$ であることが容易に示せる。さらに、孤立近傍であるという性質は安定である。このことは命題として次のように述べられる。

命題 2.3. N が f に対して孤立近傍であるとする。このとき C^0 位相における f のある近傍 \mathcal{U} が存在して、任意の $g \in \mathcal{U}$ に対し N は孤立近傍である。

孤立近傍が与えられた時、それが孤立させる孤立不変集合の近くにおける力学系の様子をうまく切り取ることを考えよう。まず $N^- := \{x \in N \mid f(x) \notin N\}$ とおいて、 N の *exit set* と呼ぶことにする。連続力学系の Conley 指数理論における index pair と対応する概念をここでは Franks-Richeson [5] に従い次のように定義する。

定義 2.4. 孤立不変集合 S の *filtration pair* とは $\text{cl}(\text{int}(N)) = N$, $\text{cl}(\text{int}(L)) = L$ を満たすコンパクト集合の対 $P = (N, L)$ であって、次の条件が成り立つものをいう。

- (1) $\text{cl}(N \setminus L)$ は S の孤立近傍となる。
- (2) N において、 L は N^- の近傍である。
- (3) $f(L) \cap \text{cl}(N \setminus L) = \emptyset$.

定理 2.5. 任意の孤立不変集合に対し、その *filtration pair* が存在する。さらに強く、任意の S の近傍 V に対し V に含まれる *filtration pair* (N, L) と、 C^0 位相における f の近傍 \mathcal{U} が存在して、任意の $g \in \mathcal{U}$ に対し (N, L) が *filtration pair* となる。

位相空間対 $N \supset L$ から L を 1 点 $*$ につぶして得られる基点付き位相空間 $((N \setminus L) \amalg \{*\}, \{*\})$ を $(N/L, [L])$ と表わす。また、基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のなす圏を Top_* 、基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のホモトピー類のなす圏を \mathcal{HTop}_* と書く。このとき $(N/L, [L])$ は Top_* の対象である。

連続力学系の場合には、 $(N/L, [L])$ のホモトピー型が index pair のとり方によらないことがわかり (Conley [2], Salamon[25] を参照)、それをもってホモトピー Conley 指数と定義することができた。ところが離散力学系においてはこれは成立しない。

平面上の鞍点を例にして連続と離散の違いを見よう。図 1 の左側において長方形全体を N 、点を打たれた領域を L とし、 $(N/L, [L])$ を考える。連続力学系の場合には鞍点の任意の index pair (N', L') を取ったとき、力学系の流れに沿うホモトピーにより $(N'/L', [L'])$ は $(N/L, [L])$ とホモトピー同値になる。ところが離散力学系においては、図 1 の右のように離れ小島 M を加えた $(N \cup M, L)$ という対も *filtration pair* の定義をみたしてしまう。 $(N/L, [L])$ は円周 S^1 とホモトピー同値であるが $((N \cup M)/L, [L])$ は S^1 と一点の和になり、よって $(N/L, [L])$ と $((N \cup M)/L, [L])$ はホモトピー同値ではない。また、コホモロジーを取ってみても、 $H^0((N \cup M)/L, [L]) \cong H^0(N/L, [L])$ であり、等しくならない。よって離散力学系の場合には一般に *filtration pair* の商空間のホモトピー型やコホモロジー群は *filtration pair* の取り方に依存してしまう。

この問題を克服するために、 $(N/L, [L])$ 上に次のように写像 f_P を導入する。 $p: N \rightarrow N/L$ を射影とし、 p によって $N \setminus L$ と $(N/L) \setminus [L]$ を同一視する。*filtration pair* の定義における条件 (2) より $x \in N \setminus L$ ならば $f(x) \in N$ であることに注意し、

$$f_P(x) := \begin{cases} p(f(x)), & x \neq [L] \\ [L], & x = [L] \end{cases}$$

と定義する。

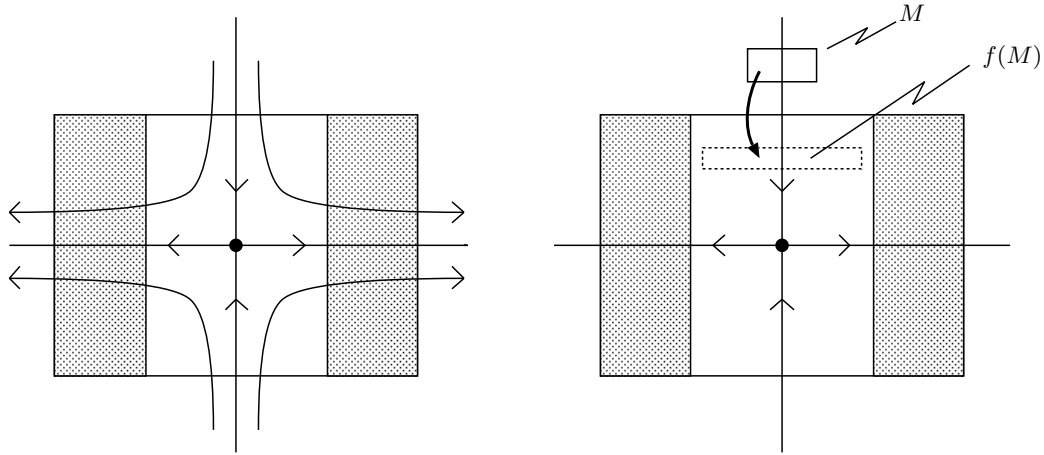


図 1: 鞍点の filtration pair, 離散の場合は右図も許されることから問題が生じる.

定理 2.6. $f_P : (N/L, [L]) \rightarrow (N/L, [L])$ は連続であり, $f_P^{-1}([L])$ は $[L]$ の近傍となる.

これにより, Top_* の対象 $(N/L, [L])$ と Top_* の射 f_P が得られた. この 2 つを対として考えるための枠組みを一般のカテゴリリーにおいて構成しよう.

カテゴリリー \mathcal{C} に対し, 新たなカテゴリリー $\text{End}(\mathcal{C})$ を, 対象は \mathcal{C} の対象 A と \mathcal{C} の射 $a : A \rightarrow A$ の対 (A, a) であり, (A, a) から (B, b) への射とは \mathcal{C} での射 $\phi : A \rightarrow B$ であって, $\phi \circ a = b \circ \phi$ をみたすものと定義する. また $\text{Aut}(\mathcal{C})$ を, 対象を $a : A \rightarrow A$ が同型射であるような対 (A, a) に制限した $\text{End}(\mathcal{C})$ の充満部分圏とする.

このように定義すると, $((N/L, [L]), f_P)$ は $\text{End}(\text{Top}_*)$ の対象と見ることができる. 次に, filtration pair の取り方による違いを吸収するために $\text{End}(\text{Top}_*)$ の上に同値関係を入れることを考えよう. これも一般のカテゴリリーにおいて定義する.

定義 2.7. \mathcal{C} をカテゴリリーとする. $\text{End}(\mathcal{C})$ の対象 (A, a) と (B, b) が *shift* 同値であるとは, $\text{End}(\mathcal{C})$ の射 $r : (A, a) \rightarrow (B, b)$ と $s : (B, b) \rightarrow (A, a)$ が存在して (すなわち次の図が可換であり),

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A \\ r \downarrow & & r \downarrow \\ B & \xrightarrow{b} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A \\ s \uparrow & & s \uparrow \\ B & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

ある $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ に対し \mathcal{C} の射として $r \circ s = b^m$ と $s \circ r = a^m$ が成立することをいう.

注意 2.8. 上の定義では \mathcal{C} の射として $r \circ s = b^m$ と $s \circ r = a^m$ が成立することを条件としたが, a と b は

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A \\ a \downarrow & & a \downarrow \\ A & \xrightarrow{a} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{b} & B \\ b \downarrow & & b \downarrow \\ B & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

が可換なので $\text{End}(\mathcal{C})$ の射と思うこともでき, $\text{End}(\mathcal{C})$ の射としても $r \circ s = b^m$ と $s \circ r = a^m$ が成り立つ.

注意 2.9. $\text{End}(C)$ の対象として同型なら shift 同値である. すなわち, ある同型射 $h: A \rightarrow B$ があって $h \circ a = b \circ h$ であるならば, $r = b \circ h, s = h^{-1}$ とおくことにより $r \circ s = b, s \circ r = h^{-1} \circ b \circ h = a$ となり, $m = 1$ として shift 同値である. また (A, a) と (B, b) が shift 同値の時, a, b が同型射ならば r, s も同型射であり, $h = r \circ f^{-m}$ とおくことで同型になっている.

この shift 同値は実際に同値関係となることが容易にわかり, 次の定理が成立する.

定理 2.10. $P = (N, L)$ と $P' = (N', L')$ が S の filtration pair ならば, $(N/L, f_P)$ と $(N'/L', f_{P'})$ は shift 同値である.

定理 2.10 により次の定義が filtration pair の取り方によらない意味を持つ.

定義 2.11. S を f の孤立不変集合とする. S のホモトピー Conley 指数 $h_f(S)$ とは, $P = (N, L)$ を S の filtration pair として, $(N/L, f_P)$ の $\text{End}(\mathcal{H}\text{Top}_*)$ での shift 同値類のこととする.

もちろん $\text{End}(\text{Top}_*)$ の shift 同値類と定義しても well-defined であるが, ホモトピー類の方が扱いやすいのでこのように定義している.

Conley 指数の簡単だが重要な性質として, Ważewski Property がある. $\mathcal{H}\text{Top}_*$ において, $(*, *)$ とその上の定値写像 (のホモトピー同値類) を $\underline{0}$ と書くことにしよう.

命題 2.12 (Ważewski Property). N を孤立近傍とする. $h_f(\text{Inv}(N, f))$ が $\underline{0}$ と shift 同値でないならば, $\text{Inv}(N, f) \neq \emptyset$ である.

証明. 対偶を示す. 孤立不変集合 \emptyset の filtration pair として $P = (\emptyset, \emptyset)$ を取る. $\emptyset/\emptyset = ((\emptyset \setminus \emptyset) \amalg \{*\}, \{*\}) = (\{*\}, \{*\})$ であり, その上に導かれる f_P は, 定値写像に他ならない. よって $h_f(\emptyset)$ は $\underline{0}$ の shift 同値類となる. \square

Conley 指数の応用において重要な役割をはたすのが, 次の性質である.

命題 2.13 (ホモトピー Conley 指数のホモトピー不変性). $A \subset \mathbb{R}$ をコンパクト区間とし, $F: A \times X \rightarrow X$ が連続であるとする. このとき, 任意の $\lambda \in A$ で N が $f_\lambda = F(\lambda, \cdot): X \rightarrow X$ に対して孤立近傍であるならば, $h_{f_\lambda}(\text{Inv}(N, f_\lambda))$ は λ によらない.

N がこの命題の仮定をみたすとき, 孤立不変集合の族 $S_\lambda = \text{Inv}(N, f_\lambda)$ はパラメータ空間 A 上に連続する, という. この命題 2.13 は次より従う.

命題 2.14 (ホモトピー Conley 指数の安定性). N が f に対する孤立近傍であるとする. のとき f の C^0 位相での近傍 \mathcal{U} が存在し, 任意の $g \in \mathcal{U}$ で N は g に対する孤立近傍であり, $h_f(\text{Inv}(N, f)) = h_g(\text{Inv}(N, g))$ が成立する.

次は2つの孤立不変集合の和に対してホモトピー Conley 指数がどうふるまうかを見よう. $((A/B, [B]), \varphi)$ と $((A'/B', [B']), \varphi')$ を $\text{End}(\mathcal{H}\text{Top}_*)$ の対象とするとき

$$[((A/B, [B]), \varphi) \vee ((A'/B', [B']), \varphi')] := [((A/B, [B]), \varphi) \vee ((A'/B', [B']), \varphi')]$$

と定義すると, これは shift 同値類の代表の取りかたによらず, よって $\text{End}(\mathcal{H}\text{Top}_*)$ の shift 同値類に対してウェッジ和の構造が入ることがわかる.

命題 2.15 (ホモトピー Conley 指数の加法性). S_1, S_2 が交わらない孤立不変集合ならば,

$$h(S_1 \cup S_2) = h(S_1) \vee h(S_2).$$

証明. S_i が閉集合であることから U_i という S_i の開近傍で互いに交わらないものがとれる. 定理 2.5 より S_i の filtration pair $P_i = (N_i, L_i)$ で, $N_i \subset U_i \cap f^{-1}(U_i)$ をみたまものがとれる. $N = N_1 \cup N_2$, $L = L_1 \cup L_2$ とおく. このとき $P = (N, L)$ は $S_1 \cup S_2$ の filtration pair であり, $((N/L, [L]), f_P) = ((N_1/L_1, [L_1]), f_{P_1}) \vee ((N_2/L_2, [L_2]), f_{P_2})$ となるので命題が示された. \square

また, Conley 指数は位相共役な力学系に対しては同じ値をとる. ここで, $f: X \rightarrow X$ と $g: Y \rightarrow Y$ が $\varphi: X \rightarrow Y$ により位相共役であるとは φ が同相写像で, $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ となることをいう.

命題 2.16 (ホモトピー Conley 指数の可換性). $f: X \rightarrow X$ と $g: Y \rightarrow Y$ が $\varphi: X \rightarrow Y$ により位相共役であるとする. このとき $S \subset X$ が孤立不変集合ならば $\varphi(S) \subset Y$ も孤立不変集合であり, $h_f(S) = h_g(\varphi(S))$ が成り立つ.

証明. $P = (N, L)$ を S の filtration pair とすると, $P' = (\varphi(N), \varphi(L))$ が $\varphi(S)$ の filtration pair になることが容易に示せる. $\varphi': (N/L, [L]) \rightarrow (\varphi(N)/\varphi(L), [\varphi(L)])$ を φ から導かれる同相写像とすると,

$$\begin{array}{ccc} (N/L, [L]) & \xrightarrow{f_P} & (N/L, [L]) \\ \varphi' \downarrow & & \varphi' \downarrow \\ (\varphi(N)/\varphi(L), [\varphi(L)]) & \xrightarrow{g_{P'}} & (\varphi(N)/\varphi(L), [\varphi(L)]) \end{array}$$

が可換になる. 注意 2.9 により $((N/L, [L]), f_P)$ と $(\varphi(N)/\varphi(L), [\varphi(L)])$ は shift 同値であり, よって

$$h_f(S) = [((N/L, [L]), f_P)] = [(\varphi(N)/\varphi(L), [\varphi(L)])] = h_g(\varphi(S)).$$

\square

2.2 コホモロジー Conley 指数

ホモトピー Conley 指数を構成しその性質を見て来たが, この指数はホモトピー類の shift 同値類というこみいった形であることから, 具体的な問題に応用しにくい場合がある. そこでホモトピー Conley 指数になんらかの関手を作用させ, いくらか情報を落としてでも使いやすい形にすることをこれから考える. ベクトル空間と線型写像のカテゴリーを \mathcal{V} , 次数付きベクトル空間と次数付き線型写像のカテゴリーを \mathcal{GV} , ベクトル空間のコチェイン複体とコチェイン写像のカテゴリーを $\delta\mathcal{V}$ とする.

まず, ホモトピー Conley 指数にコホモロジー関手 H^* を作用させると, shift 同値関係は任意の関手で保たれるので $\text{End}(\mathcal{GV})$ の shift 同値類が得られる (本論文では簡単のためコホモロジーを係数でとる). これで多少は見やすくなったが, やはり shift 同値類でなく通常同値類に値をとるようにしたい.

そのために, ある関手が正則であるという概念を定義する (Mrozek [17] 参照). \mathcal{C} をカテゴリー, \mathcal{D} を $\text{End}(\mathcal{C})$ の充満部分圏とする. $F: \mathcal{D} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$ を関手とする. (A, a) を \mathcal{D} の対象とすると $F(A, a)$ は $\text{Aut}(\mathcal{C})$ の対象であり, これを $F(A, a) = (A', a')$ とおくと a' は定義より A' の自己同型射である. 一方, $a: A \rightarrow A$ は $\text{End}(\mathcal{C})$ における射 $a: (A, a) \rightarrow (A, a)$ と見ることもできるが, \mathcal{D} を充満部分圏としたので a は \mathcal{D} における射でもあり, よって関手 F により $\text{Aut}(\mathcal{C})$ の射 $F(a)$ に変換される. このとき一般に射 $F(a)$ と a' は等しくない. また $F(a)$ が自己同型であるともいえない. そういった不都合のない関手を次のように定義する.

定義 2.17. $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$ が正則関手であるとは、任意の \mathcal{D} の対象 (A, a) に対し $\text{Aut}(\mathcal{C})$ の対象 $F(A, a)$ に含まれる自己同型と、 Aut の射 $F(a)$ が一致することをいう。

このように定義した正則関手に対しては次が成立する。

命題 2.18. $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C})$ を正則関手とする。 \mathcal{D} の対象 (A, a) と (B, b) が *shift* 同値ならば、 $F(A, a) \cong F(B, b)$ 。

証明. $F(A, a) = (A', a')$, $F(B, b) = (B', b')$ とおく。 F が正則なので、 $\text{Aut}(\mathcal{C})$ の射として $F(a) = a'$, $F(b) = b'$ となっている。特に、 $F(a), F(b)$ は同型射である。仮定より (A, a) と (B, b) が *shift* 同値なので、注意 2.8 よりある $m \in \mathbb{Z}$ があって、 $\text{End}(\mathcal{C})$ の射として $r \circ s = b^m$ と $s \circ r = a^m$ が成り立つ。この等式に F を作用させると、 $F(r) \circ F(s) = F(b)^m$, $F(s) \circ F(r) = F(a)^m$ となるが、 $F(a)$, $F(b)$ が同型射なので $F(r)$, $F(s)$ も同型射である。すなわち (A', a') と (B', b') は $F(r)$, $F(s)$ により *shift* 同値であり、このとき注意 2.9 で見たように (A', a') と (B', b') は同型な対象である。□

我々はこれから正則関手として、帰納的極限を用いる。すなわち (V, φ) を $\text{End}(\mathcal{V})$ の対象としたとき、 $V_k = V$, $\varphi_{kl} = \varphi^{k-l}$ とおいて、

$$V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\varphi} V_3 \xrightarrow{\varphi} \dots$$

を帰納系と見る。具体的に書いてみよう。 $i_k : V_k \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} V_n$ を直和への標準的単射とする。 $\{i_k \circ \varphi_{kl}(x_l) - i_l(x_l)\}$ で生成される部分ベクトル空間を \tilde{V} とすると、

$$\varinjlim V_n = \bigoplus_{n \geq 1} V_n / \tilde{V}$$

であった。 i_k と \tilde{V} で割る射影の合成を $\tilde{\varphi}_k : V_k \rightarrow \varinjlim V_n$ と書くことにする。 $k \geq l$ のとき、 $\tilde{\varphi}_k \circ \varphi_{kl} = \varphi_l$ が成り立つことがわかる。このとき、任意の k で

$$\begin{array}{ccc} V_k & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} & \varinjlim V_n \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varinjlim \varphi \\ V_k & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} & \varinjlim V_n \end{array}$$

が可換になるような $\varinjlim \varphi$ が一意に存在する。また、 $a : (V, \varphi) \rightarrow (W, \psi)$ を $\text{End}(\mathcal{V})$ の射としたとき、同様に

$$\begin{array}{ccc} V_k & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} & \varinjlim V_n \\ a \downarrow & & \downarrow \varinjlim a \\ W_k & \xrightarrow{\tilde{\psi}_k} & \varinjlim W_n \end{array}$$

が可換になるような $\varinjlim a$ が一意に存在する。

このように構成した (V, φ) に $(\varinjlim V, \varinjlim \varphi)$ を対応させ、射 a に $\varinjlim a$ を対応させる帰納的極限関手が、 $\text{Aut}(\mathcal{V})$ への正則関手であることを示そう。 $\varinjlim \varphi$ が同型であることを言えば、正則性は作り方より明らかである。

これを示すために, $\varinjlim V_n$ の任意の元 α はある k があって $x_k \in V_k$ により $\alpha = \tilde{\varphi}_k(x_k)$ と表わされることを見よう. このことは, 定義より $\alpha = \sum \tilde{\varphi}_n(x_n)$ という有限和 ($x_n \in V_n$) で書けるので, 有限和に現れる n たちより大きい k をとると,

$$\alpha = \sum_n \tilde{\varphi}_n(x_n) = \sum_n \tilde{\varphi}_k \circ \varphi_{kn}(x_n) = \tilde{\varphi}_k \left(\sum_n \varphi_{kn}(x_n) \right)$$

となることからわかる.

次に $\varinjlim \varphi$ が単射であることを示す. 任意の $\tilde{\varphi}_k(x_k) \in \varinjlim V_n$ をとり, $\varinjlim \varphi(\tilde{\varphi}_k(x_k)) = 0$ としよう. $0 = \varinjlim \varphi(\tilde{\varphi}_k(x_k)) = \tilde{\varphi}_k(\varphi(x_k))$ より $i_k \circ \varphi(x_k) \in \tilde{V}$ なので, 有限和で

$$i_k \circ \varphi(x_k) = \sum (i_l \circ \varphi_{lm}(x_m) - i_m(x_m))$$

と書ける. 今, 任意の $j \geq 1$ で $V_j = V_{j+1}$ なので, 右辺において $x_m \in V_{m+1}$ と見なす. 左辺においては $\varphi(x_k) \in V_{k+1}$ と見る. $\varphi_{lm} = \varphi_{(l+1)(m+1)} = \varphi^{l-m}$ なので左右両辺において 1 つ次数を上げた等式

$$i_{k+1} \circ \varphi(x_k) = \sum (i_{l+1} \circ \varphi_{(l+1)(m+1)}(x_m) - i_{m+1}(x_m))$$

が成り立つ. よって, $i_{k+1} \circ \varphi(x_k) \in \tilde{V}$ であり, すなわち $\tilde{\varphi}_k(x_k) = \tilde{\varphi}_{k+1} \circ \varphi(x_k) = 0$ である. よって $\varinjlim \varphi$ は単射.

次に $\varinjlim \varphi$ が全射であることを示す. $\varinjlim V_n$ の任意の元 $\alpha = \tilde{\varphi}_k(x_k)$ をとってくる. $x_k \in V_k = V_{k+1}$ なので $x_k \in V_{k+1}$ と思う. このとき $\beta = \tilde{\varphi}_{k+1}(x_k)$ とおくと, $\varinjlim \varphi(\beta) = \tilde{\varphi}_{k+1}(\varphi(x_k)) = \tilde{\varphi}_k(x_k) = \alpha$ となるので全射.

以上により, 帰納的極限が正則関手 $\text{End}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{V})$ であることがわかった. この関手を L で表し,

$$L(V, \varphi) = (\varinjlim V_n, \varinjlim \varphi)$$

と書くことにする. この関手は, 後の議論で必要になる完全性を持っているのだが, 具体的な例においてこのままでは計算しにくい. そこで, 有限次元のベクトル空間上では帰納的極限と一致する, より簡単な Leray 関手を導入しよう.

(V, φ) を $\text{End}(\mathcal{V})$ の対象であって, V は有限次元とする. このとき,

$$\text{gker}(\varphi) := \bigcup_{n>0} \varphi^{-n}(0)$$

とおく. $\varphi(\text{gker} \varphi) \subset \text{gker} \varphi$ なので, まず (V, φ) から,

$$V' = V / \text{gker} \varphi, \quad \varphi' : V' \ni [x] \mapsto [\varphi(x)] \in V'$$

とにおいて新たな $\text{End}(\mathcal{V})$ の対象 (V', φ') を作ることができる.

また, (V, φ) から (W, ψ) への射 a をとると, $x \in \text{gker}(\varphi)$ ならば, ある $n > 0$ があって $\varphi^n(x) = 0$ より, $a(\varphi^n(x)) = \psi^n(a(x)) = 0$ となる. よって $a' : V' \ni [x] \mapsto [a(x)] \in W'$ と定義することで (V', φ') から (W', ψ') への射が得られた. このように定義された $\text{End}(\mathcal{V})$ からそれ自身への関手を L' と書くことにする. すなわち,

$$L'(V, \varphi) := (V', \varphi'), \quad L'(a) := a'.$$

ここで、 φ' は単射準同型である。なぜなら、 $[\varphi(x)] = 0$ ならば $\varphi(x) \in \text{gker } \varphi$ であり、ある $n > 0$ があって、 $\varphi^n(\varphi(x)) = \varphi^{n+1}(x) = 0$ となり、 $[x] = 0$ 。従って、もしも $V' = V/\text{gker } \varphi$ が有限次元なら φ' は同型になり、 (V', φ') は $\text{Aut}(V)$ の対象である。また、 L' が正則関手であることは作り方より明らか。

この構成により、有限次元ベクトル空間とその上の自己準同型のなす $\text{End}(V)$ の充満部分圏を $\text{End}_0(V)$ と書くことにすると、正則関手 $L' : \text{End}_0(V) \rightarrow \text{Aut}(V)$ が得られた。 $\text{End}_0(V)$ 上で帰納的極限 L と L' が一致することは、帰納的極限の普遍性に注意すると容易にわかる。

(V, φ) を $\text{End}_0(V)$ の対象とすると、 $\text{gker } \varphi$ は固有値 0 の一般固有空間なので、 $L(V, \varphi)$ は 0 以外の固有値の一般固有空間と、その上に φ から導かれる線型同型の組となり簡単に求めることができる。

注意 2.19. このように L を $\text{End}(V)$ 上で定義したが、次数付きベクトル空間で考えて $L : \text{End}(gV) \rightarrow \text{Aut}(gV)$ と見ることでもできる。また、 $\delta \circ \delta = 0$ ならば $L(\delta) \circ L(\delta) = 0$ であることより、 L はコバウンダリ写像をコバウンダリ写像に写し、関手性よりコチェイン写像をコチェイン写像に写すので、 $L : \text{End}(\delta V) \rightarrow \text{Aut}(\delta V)$ と思える。

さて、ホモトピー Conley 指数に H^* を作用させることで $\text{End}(V)$ の shift 同値類が得られることはすでに述べた。よって、これに $L : \text{End}(\delta V) \rightarrow \text{Aut}(\delta V)$ をさらに作用させると、命題 2.18 により $\text{Aut}(\delta V)$ の同値類になる。すなわちベクトル空間とその上の自己同型が、同型を除いて一意に決まることになる。これを新たな Conley 指数としよう。

定義 2.20. 孤立不変集合 S に対し、その filtration pair $P = (N, L)$ をとり、

$$\text{Con}^*(S, f) := L(H^*(N/L, [L]), f_P^*)$$

と定義する。これをコホモロジー Conley 指数という。

ベクトル空間とその上の同型を区別するときは、

$$(CH^*(S, f), \chi^*(S, f)) := L(H^*(N/L, [L]), f_P^*)$$

と書くことにする。本論文においては以後このコホモロジー Conley 指数を用いるが、これまでの構成から明かなようにホモロジー関手 H_* 、ホモトピー関手 π_n などにより Conley 指数を構成することも出来る。

コホモロジー Conley 指数に対してもホモトピー Conley 指数と同様の性質が成立する。特に、基点付き位相空間のウェッジ和のコホモロジー群はそれぞれの空間のコホモロジー群の直和なので、命題 2.15 及び帰納的極限、Leray 関手が直和を保つことから次が成立する。

命題 2.21 (コホモロジー Conley 指数の加法性). S_1, S_2 が交わらない孤立不変集合ならば、

$$\text{Con}^*(S_1 \cup S_2, f) \cong \text{Con}^*(S_1, f) \oplus \text{Con}^*(S_2, f).$$

Conley 指数を実際に計算する時には、Conley 指数のホモトピー不変性により簡単な写像での計算に帰着することがよく行なわれる。双曲型不動点を例にそれを見てみよう。簡単のため $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ で証明するが、一般の多様体の場合も同様である。また、コホモロジーの係数を \mathbb{F} で表わす。

命題 2.22. $0 \in \mathbb{R}^n$ が C^1 級微分同相写像 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の双曲型不動点であり、 k を df_0 の固有値で絶対値が 1 より大きいもの数、 l を df_0 の実固有値で -1 より小さいもの数とする。このとき、

$$\text{Con}^k(\{0\}, f) = \begin{cases} (0, 0), & i \neq k \\ (\mathbb{F}, (-1)^l), & i = k \end{cases}$$

となる。

証明. (Mrozek-Mischaikow [12], Theorem 3.33 参照) 最初に f が線型同型 $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ である場合を考える. A の固有値を絶対値が 1 より大きいものと小さいものに分け, それに対応する \mathbb{R}^n の分解を $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ とする. この分解によって A は

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

と表わされる. まず A の固有値は重複を持たないと仮定すると, 適当な基底により A は対角線上に実固有値 μ_j と複素固有値 $r_j \exp(-i\varphi_j)$, $r_j \exp(i\varphi_j)$ に対応する 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} r_j \cos \varphi_j & r_j \sin \varphi_j \\ -r_j \sin \varphi_j & r_j \cos \varphi_j \end{pmatrix}$$

が並んだ行列により表現される. この表現をより簡単なものに変形するホモトピーを作ろう.

$$h(u, t) := tu + (1 - t) \cdot \operatorname{sgn}(u) \cdot \exp(\operatorname{sgn}(|u| - 1) \cdot \ln 2)$$

という関数を考える. 行列 A_t を対角線上に並ぶブロックは A と同様の形であり, 実固有値 μ_j に対応するブロックは $h(\mu_j, t)$ で, 複素固有値 $r_j \exp(-i\varphi_j)$, $r_j \exp(i\varphi_j)$ に対応するブロックは

$$h(r_j, t) \begin{pmatrix} \cos t\varphi_j & \sin t\varphi_j \\ -\sin t\varphi_j & \cos t\varphi_j \end{pmatrix}$$

で置き換えたものとする. A_0 の固有値は -2 が l 個, 2 が $k-l$ 個で残りの $n-k$ 個は $1/2$ もしくは $-1/2$ になっている. すなわち, このホモトピーにより A の回転部分は消され, 固有値の大きさもそろえられている. 原点の周りの δ 閉球を $B(\delta)$ とすると, このホモトピーにより $B(\delta)$ が $\{0\}$ の孤立近傍であるという性質が保たれるので, Conley 指数のホモトピー不変性により $\operatorname{Con}^*(\{0\}, A) = \operatorname{Con}^*(\{0\}, A_0)$ である. この A_0 に対して

$$\begin{aligned} N &:= \{(x, y) \in U \oplus V \mid \|x\| \leq 2, \|y\| \leq 1\}, \\ L &:= \{(x, y) \in N \mid \|x\| \geq 1\} \end{aligned}$$

とおくと $\{0\}$ の filtration pair になり, 簡単な考察により

$$\operatorname{Con}^k(\{0\}, A_0) = \begin{cases} (0, 0), & i \neq k \\ (\mathbb{F}, (-1)^l), & i = k \end{cases}$$

がわかる. A の固有値が重複を持つ場合は, その重複をずらすホモトピーにより今の場合に帰着される.

さて次に線型とは限らない一般の f の場合を考える. $A = df_0$ とおこう. f は C^1 級なので $f(x) = Ax + r(x)$ と表わすと $r(x) = o(\|x\|)$ である. f と A を結ぶホモトピーを $\lambda \in [0, 1]$ に対して $f_\lambda(x) := Ax + \lambda r(x)$ とする. 各 f_λ に対して Hartman-Grobman の定理を用いると, λ に対応してある $\delta(\lambda) > 0$ があって, $B(\delta(\lambda))$ が f_λ に対する孤立近傍になる. 命題 2.3 により, $B(\delta(\lambda))$ は λ を含むある开区間上で孤立近傍であり続ける. $[0, 1]$ がコンパクトであることから数列 $0 = \lambda_1 < \dots < \lambda_m = 1$ がとれて, 任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対しある j があって $B(\delta(\lambda_j))$ が f_λ の孤立近傍であるようにできる. このとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Con}^*(\{0\}, A) &= \operatorname{Con}^*(\operatorname{Inv} B(\delta), f_0) = \operatorname{Con}^*(\operatorname{Inv} B(\delta), f_{\lambda_2}) = \dots \\ &= \operatorname{Con}^*(\operatorname{Inv} B(\delta), f_{\lambda_{m-1}}) = \operatorname{Con}^*(\operatorname{Inv} B(\delta), f_1) = \operatorname{Con}^*(\{0\}, f) \end{aligned}$$

となり f の Conley 指数は線型写像 A での計算に帰着された. \square

3 Morse 分解 と Filtration

3.1 Morse 分解

Conley 指数は孤立不変集合の内部構造についての情報は捨てている. 例えば, 図 2 の左図での 1 つの不動点 S とおき, 右図における 2 つの不動点とその間の区間の和集合を S' とすると, Conley 指数では S と S' は区別されない. このことは S がサドル・ノード分岐によって S' になったもの



図 2: Conley 指数では区別できない孤立不変集合の例

と見ると, Conley 指数の連続性を示しているといえるが, 孤立不変集合 S' の内部の力学系についての情報を得ることはできなくなっている.

そこで孤立不変集合をさらに小さな孤立不変集合と, その間を結ぶ軌道に分解することをこの節では考える. $x \in X$ の ω 極限集合を,

$$\omega(x) = \bigcap_{N>0} \text{cl} \left(\bigcup_{n>N} \{f^n(x)\} \right)$$

と定義する. これは, x の正方向の軌道からどんなに先の方を取ってもその中から収束できる点の集まりである. 同様に負方向の極限集合も定義したいが, f は可逆とは限らないので負方向の軌道は一意的でない. よって完全軌道ごとにその極限をみななくてはならない. 完全軌道 $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow X$ に対し, その α 極限集合を,

$$\alpha(x) = \bigcap_{N>0} \text{cl} \left(\bigcup_{n>N} \{\sigma(-n)\} \right)$$

と定義する. また, 集合 $A, B \subset Y$ に対し, 集合

$$C(A, B; Y) := \{x \in Y \setminus (A \cup B) \mid \exists \text{ 完全軌道 } \sigma: \mathbb{Z} \rightarrow Y, \alpha(\sigma) \subset A, \omega(x) \subset B\}$$

を A から B への Y 内での *connecting orbit* の集合と呼び, $C(A, B; Y)$ に含まれる 1 つ完全軌道のことを A から B への *connecting orbit* もしくは *connection* と呼ぶ.

始めに, 最も単純に孤立不変集合 S を 2 つの孤立不変集合とその間の *connecting orbit* たちに分割することを考えよう. $A \subset X$ がアトラクターであるとは, ある A の近傍 U で $f(U) \subset \text{int } U$ となるものがあり,

$$A = \bigcap_{n>0} f^n(U)$$

となることをいう. また, 不変集合 $S \subset X$ に対し $A \subset S$ が S 内のアトラクターであるとは, f を S に制限して S を全空間と見たときに上の定義がみたされることをいう. 不変集合 S 内のアトラクター A に対し, その双対リベラー A^* を

$$A^* := \{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}$$

により定義する. この対 (A, A^*) を 不変集合 S のアトラクター・リペラー分解という.

また $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$ とするとき, 点列 $\{x_n\}_{n=p, \dots, q}$ が x_p から x_q への ε 擬軌道であるとは, d を距離関数として $p \leq n \leq q-1$ で $d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$ が成立することをいう. すなわち ε だけの誤差を許した軌道のことである.

命題 3.1. 孤立不変集合 S が (A, A^*) によりアトラクター・リペラー分解されているとき, 次の 3 つが成立する.

- (1) $S = A \cup A^* \cup C(A^*, A; S)$.
- (2) ある $\varepsilon > 0$ があって, A の点から A^* の点への ε 擬軌道は存在しない.
- (3) A および A^* は S 内における孤立不変集合である.

アトラクター・リペラー分解よりも細かい分解を考えようとする, それらの成分の間の順序関係を記述するために半順序集合を用いなくてはならない.

集合 \mathcal{P} 上の二項関係 $<$ が半順序であるとは, (1) $p \not< p$, (2) $p < q$ かつ $q < r$ ならば $p < r$ が成り立つことをいう. 半順序を特定して考えるときは, 半順序集合 $(\mathcal{P}, <)$ と書く.

定義 3.2. \mathcal{P} を有限集合とする. 互いに交わらない孤立不変集合の族 $\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \{M(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$ が孤立不変集合 S の Morse 分解であるとは, \mathcal{P} 上の半順序 $<$ が存在して, 任意の $x \in S$ と任意の S に含まれる x の完全軌道 $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow S$ に対し, 次のどちらかが成立することである.

- (1) ある $p \in \mathcal{P}$ があって, $\sigma(\mathbb{Z}) \subset M(p)$ である.
- (2) $p < q$ をみたま $p, q \in \mathcal{P}$ に対し, $\omega(x) \subset M(p)$ かつ $\alpha(\sigma) \subset M(q)$ である.

\mathcal{P} の半順序を固定して Morse 分解を考えることもあり, その時は $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ と書く.

Morse 分解における各 $M(p)$ を Morse 成分という. $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ を S の Morse 分解とするような \mathcal{P} 上の半順序のうち, 最も弱いものを *map defined order* という. $C(M(q), M(p); S) \neq \emptyset$ のとき $p < q$ と定義した関係を推移律を満たして半順序になるように拡張すると map defined order になることに注意する.

孤立不変集合 S が Morse 分解されているとき, S に含まれる孤立不変部分集合は Morse 成分たちだけではなく, いくつかの Morse 成分とその間を結ぶ connecting orbit を合わせると S 内の孤立不変部分集合が得られる場合がある. これを記述するためにまたいくつか定義をする.

$(\mathcal{P}, <)$ を半順序集合とする. $I \subset \mathcal{P}$ が区間であるとは $p < r < q$ かつ $p, q \in I$ ならば $r \in I$ であることをいう. 区間 I は $r < q$ かつ $q \in I$ ならば $r \in I$ のとき, 吸引的であるという. \mathcal{P} の区間の集合を $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$, 吸引的区間の集合を $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{P}, <)$ と書く. 区間の順序 n 対 (I_1, \dots, I_n) が隣り合っているとは $I_1 \cup \dots \cup I_n \in \mathcal{I}$ であり, かつそれぞれの要素の間に区間の順序に逆らう半順序関係がない, つまり $i < j$ に対し $p \in I_i, q \in I_j$ ならば $q \not< p$ であることを言う. 隣り合った順序 n 対の集合を $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_n(\mathcal{P}, <)$ と書き, \mathcal{I}_n の元 (I_1, \dots, I_n) の各区間の和 $I_1 \cup \dots \cup I_n$ を $I_1 I_2 \dots I_n$ と表わす.

区間 I に対し,

$$M(I) := \bigcup_{p \in I} M(p) \cup \bigcup_{q, r \in I} C(M(q), M(r); S)$$

とおく. このとき次が成り立つ.

命題 3.3. $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ を孤立不変集合 S の Morse 分解とすると,

- (1) 任意の $I \in \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$ に対し, $M(I)$ は孤立不変集合である.
- (2) 任意の $I \in \mathcal{A}(\mathcal{P}, <)$ に対し, $M(I)$ は S 内のアトラクターである.
- (3) $I, J \in \mathcal{I}_2$ ならば, $(M(J), M(I))$ は孤立不変集合 $M(IJ)$ のアトラクター・リペラー分解である.

3.2 filtration

孤立不変集合に対する filtration pair の拡張として, Morse 分解に対する filtration というものが考えられる.

定義 3.4. X のコンパクト部分集合の族 $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) = \{N(I) \mid I \in \mathcal{A}(\mathcal{P}, <)\}$ が Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ の filtration であるとは, 任意の $I, J \in \mathcal{A}(\mathcal{P}, <)$ に対し, 次にあげる条件が成立することをいう.

- (1) $(N(I), N(\emptyset))$ は $M(I)$ の filtration pair である.
- (2) $N(I) \cap N(J) = N(I \cap J)$.
- (3) $N(I) \cup N(J) = N(I \cup J)$.

定理 3.5 (Richeson). 任意の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ に対し, その filtration が存在する. さらに強く filtration $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ で, C^0 位相における f のある近傍 \mathcal{U} が存在して任意の $g \in \mathcal{U}$ に対して $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ が再び filtration の条件をみたすものがとれる.

この定理の前半の filtration の存在の証明は Franks-Richeson [5] を参照のこと. 後半の安定な filtration の存在は Richeson [21] において multi-valued map という概念を用いて示されている (Richeson [22] に概説がある). multi-valued map とは, X から Y の巾集合 $\mathcal{P}Y$ への写像のことであり, 適当な条件のもとで $F : X \rightarrow \mathcal{P}X$ を力学系と見て Conley 指数理論を構成することができる (Kaczynski-Mrozek [8] 等を参照). また, $g : X \rightarrow X$ (もしくは $X \rightarrow \mathcal{P}X$) が multi-valued map $F : X \rightarrow \mathcal{P}X$ の selector であるとは, 任意の $x \in X$ に対し $G(x) \subset F(x)$ が成り立つことを言う. 定理は, まず $F_\varepsilon(x)$ を $f(x)$ を中心とする ε 閉球とにおいて得られる multi-valued map F_ε に対して filtration の存在を示し, その filtration が F_ε の任意の selector に対して再び filtration になることを示して証明される.

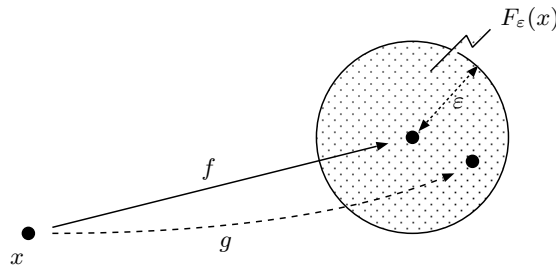


図 3: multi-valued map F_ε と selector

4 Connection Matrix Pair

4.1 アトラクター・リペラー分解の場合

ここではまず最も単純に Morse 成分が 2 つの場合, すなわちアトラクター・リペラー分解の場合の議論を行なう. 今後の考察において基本となる結果を述べよう.

定理 4.1 (長完全列の存在). 孤立不変集合 S の任意のアトラクター・リペラー分解に対し, 次の $\text{End}(\mathcal{V})$ での長完全列が存在する.

$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^k(R) \xrightarrow{\rho^*} \text{Con}^k(S) \xrightarrow{L^*} \text{Con}^k(A) \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^{k+1}(R) \xrightarrow{\rho^*} \cdots$$

この定理の証明のため, 基点付き位相空間のコホモロジーで定義されたコホモロジー Conley 指数を扱いの容易な空間対のコホモロジーと関係づける補題を示そう. つまり $H^*(N/L, [L])$ 上ではなく, $H^*(N, L)$ 上の写像から Conley 指数を構成することを試みる. ここで問題なのは, f_P と異なり f は (N, L) から (N, L) への写像ではないということである. そこでひとまず $f : (N, L) \rightarrow (N \cup f(L), L \cup f(L))$ と見て, これと包含写像 $i : (N, L) \rightarrow (N \cup f(L), L \cup f(L))$ をコホモロジーに移すと,

$$f^*, i^* : H^*(N \cup f(L), L \cup f(L)) \rightarrow H^*(N, L)$$

となるが, Alexander-Spanier コチェインにおいて

$$i^\sharp : C^\sharp(N \cup f(L), L \cup f(L)) \rightarrow C^\sharp(N, L)$$

が同型になるので (Spanier [26], Chapter 6, §4, Lemma 4) i^* は同型写像である. そこで f^* と i^{*-1} を合成し,

$$F_{N,L}^* := f^* \circ i^{*-1} : H^*(N, L) \rightarrow H^*(N, L)$$

とおく.

補題 4.2. $\text{Con}^*(S) \cong L(H^*(N, L), F_{N,L}^*)$ である.

証明. $(N \cup f(L)/L \cup f(L), [L \cup f(L)])$ と $(N/L, [L])$ は基点付き位相空間として同じものなので, f_P を $(N/L, [L])$ から $(N \cup f(L)/L \cup f(L), [L \cup f(L)])$ への写像と思える. そこで $i : (N, L) \rightarrow (N \cup f(L), L \cup f(L))$ を包含写像, π, π' を射影とすると, f_P の定義及び $f(L) \cap (N \setminus L) = \emptyset$ より次が可換になっている.

$$\begin{array}{ccccc} (N, L) & \xrightarrow{f} & (N \cup f(L), L \cup f(L)) & \xleftarrow{i} & (N, L) \\ \pi \downarrow & & \pi' \downarrow & & \pi \downarrow \\ (N/L, [L]) & \xrightarrow{f_P} & (N \cup f(L)/L \cup f(L), [L \cup f(L)]) & \xlongequal{\quad} & (N/L, [L]) \end{array}$$

この図式に Alexander-Spanier コホモロジー関手を作用させると,

$$\begin{aligned} (\pi' \circ f)^* &= f^* \circ \pi'^* = \pi^* \circ f_P^* = (f_P \circ \pi)^*, \\ (\pi' \circ i)^* &= i^* \circ \pi'^* = \pi^* \circ id^* = \pi^* \end{aligned}$$

となる。またこのとき、先に述べたように i^* は同型写像であるが、Massey [9] の Chap 8, Theorem 8.4 により π^* も同型である。これを変形して

$$F_{N,L}^* = f^* \circ i^{*-1} = f^* \circ \pi'^* \circ \pi^{*-1} = \pi^* \circ f_P^* \circ \pi^{*-1}$$

となるので、 f_P^* と $F_{N,L}^*$ は共役となる。ここで注意 2.9 及び命題 2.18 を用いると正則関手である L の作用により $\text{Con}^*(S)$ と $L(H^*(N, L), F_{N,L}^*)$ は $\text{Aut}(\mathcal{GV})$ において同値となることがわかる。□

定理 4.1 の証明。定理 3.5 より filtration が存在するが、この場合 $\mathcal{A}(\mathcal{P}, <) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \emptyset\}$ と表せるので、対応する filtration も 3 つの要素からなる。これらを $N(\{1, 2\}) = N$, $N(\{1\}) = L$, $N(\emptyset) = K$ と書くことにすると、

$$S = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus K), f), \quad R = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L), f), \quad A = \text{Inv}(\text{cl}(L \setminus K), f)$$

となっていて、特に $K \subset L \subset N$ であることがわかる。 $i_1 : (L, K) \rightarrow (N, K)$, $i_2 : (N, K) \rightarrow (N, L)$, $\iota : (L/K, [L]) \rightarrow (N/K, [K])$ を包含写像, $\rho : (N/K, [K]) \rightarrow (N/L, [L])$ を射影とすると、

$$\begin{array}{ccccc} (L, K) & \xrightarrow{i_1} & (N, K) & \xrightarrow{i_2} & (N, L) \\ \pi_A \downarrow & & \pi_S \downarrow & & \pi_R \downarrow \\ (L/K, [L]) & \xrightarrow{\iota} & (N/K, [K]) & \xrightarrow{\rho} & (N/L, [L]) \end{array}$$

が可換になっている。このとき図式

$$\begin{array}{ccccc} (L, K) & \longrightarrow & (N, K) & \longrightarrow & (N, L) \\ i \downarrow & & i \downarrow & & i \downarrow \\ (L \cup f(K), K \cup f(K)) & \longrightarrow & (N \cup f(K), N \cup f(K)) & \longrightarrow & (N \cup f(L), N \cup f(L)) \\ f \uparrow & & f \uparrow & & f \uparrow \\ (L, K) & \longrightarrow & (N, K) & \longrightarrow & (N, L) \end{array}$$

から 3 つ組のコホモロジー長完全列を作る。前に見たように i^* は同型であり、また 3 つ組のコホモロジー長完全列の自然性から次の可換な長完全列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^k(N, L) & \longrightarrow & H^k(N, K) & \longrightarrow & H^k(L, K) & \longrightarrow & H^{k+1}(N, L) & \longrightarrow & \cdots \\ & & f^* \circ (i^*)^{-1} \downarrow & & f^* \circ (i^*)^{-1} \downarrow & & f^* \circ (i^*)^{-1} \downarrow & & f^* \circ (i^*)^{-1} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^k(N, L) & \longrightarrow & H^k(N, K) & \longrightarrow & H^k(L, K) & \longrightarrow & H^{k+1}(N, L) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

L は完全関手なので (Massey [9], Appendix A.7) この長完全列に L を作用させると、 $\text{End}(\mathcal{V})$ における長完全列

$$\rightarrow L(H^k(N, L), F_{N,L}^*) \rightarrow L(H^k(N, K), F_{N,K}^*) \rightarrow L(H^k(L, K), F_{L,K}^*) \rightarrow L(H^{k+1}(N, L), F^{k+1}_{N,L}) \rightarrow$$

が得られるが、補題 4.2 により $L(H^k(N, L), F_{N,L}^*) = \text{Con}^k(R)$ なので、同型 $L(\pi_S^*) = \pi_S^*$, $L(\pi_R^*) = \pi_R^*$, $L(\pi_A^*) = \pi_A^*$ を間にはさむことにより定理の長完全列が示された。□

系 4.3. $\delta^* \neq 0$, $CH^*(S) \cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$, $\chi^*(S) \cong \chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$ のいずれかが成立すれば、 $C(R, A; S) \neq \emptyset$.

証明. 対偶を示す. $C(R, A; S) = \emptyset$ ならば $S = A \amalg R$ であり, 命題 2.21 より $CH^*(S) \cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ かつ $\chi^*(S) \cong \chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$ となる. またこのとき, 完全性より $\delta^* = 0$ となる. \square

この系を用いて connecting orbit の存在を示せる例をあげよう.

例 4.4 (Broken Horseshoe, Richeson [20, 22] 参照).

f を平面上の写像で, 長方形 N_1, N_2 を次の図 4 のように写像するものとする. ただし, 矢印

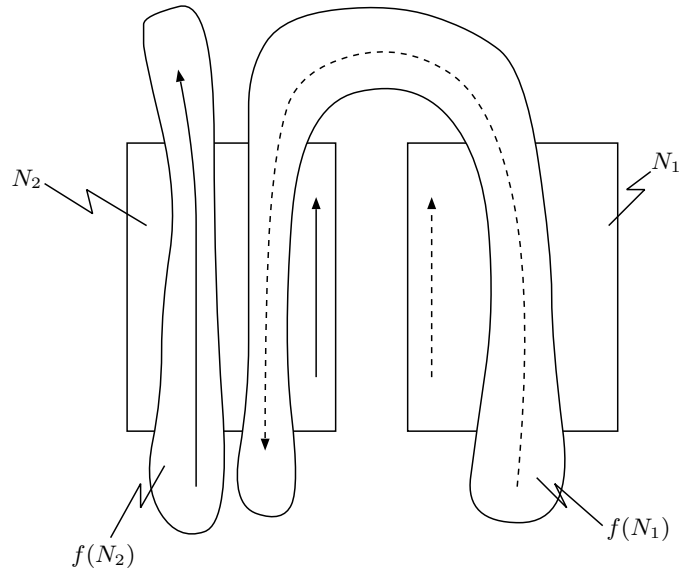


図 4: Broken Horseshoe

はそれぞれの長方形の写像される向きを表している. $N := N_1 \cup N_2$ とすると N は孤立近傍で, $S := \text{Inv}(N)$ のアトラクター・リペラー分解を $R := \text{Inv}(N_1)$, $A := \text{Inv}(N_2)$ が与えることが図からわかる. このとき次の図 5 において, 網がけしてある領域と斜線部の和集合を L , 網がけしてある領域を K とすると, このアトラクター・リペラー分解の filtration が得られる.

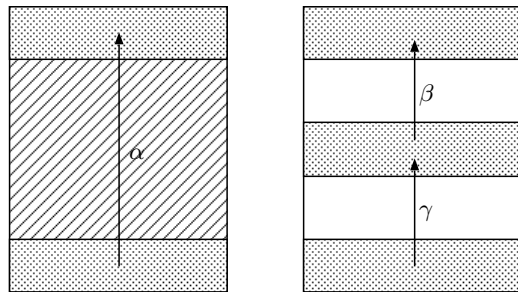


図 5: Broken Horseshoe の filtration

Conley 指数を計算してみよう. この例の場合 Alexander-Spanier コホモロジーは特異コホモロジーと同型なので, 特異コホモロジーで考えることにする. α, β, γ で表わされた 3 本の矢印は, $H_*(N/K, [K])$ の基底の代表元を与えている. $H^*(N/K, [K])$ においてその双対基底をとると, これらの矢印の写像のされ方より

$$(H^k(N/K, [K]), f_P^*) \cong \begin{cases} \left(\mathbb{F} \oplus \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1 \\ (0, 0), & k \neq 1 \end{cases}$$

となることがわかる. これに L を作用させよう. 適当に基底をとると $k = 1$ の場合に現れる行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と変形され, $\text{gker } f_P^*$ は固有値 0 の一般固有空間なので

$$\text{Con}^k(S) \cong \begin{cases} \left(\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), & k = 1 \\ (0, 0), & k \neq 1 \end{cases}$$

と計算される. また filtration から

$$\text{Con}^k(A) \cong \text{Con}^k(R) \cong \begin{cases} (\mathbb{F}, 1), & k = 1 \\ (0, 0), & k \neq 1 \end{cases}$$

となっている (より簡単な filtration pair をそれぞれについて見つけて考えてもよい). この場合 $CH^*(S) \cong CH^*(A) \oplus CH^*(R)$ は成立しているが, $\chi^*(S) \cong \chi^*(A) \oplus \chi^*(R)$ なので, 系 4.3 により $C(R, A; S) \neq \emptyset$ がわかる.

注意 4.5. 例 4.4 において f が微分同相写像であり, A, R がそれぞれ双曲型不動点 p, q である場合を考えよう. この時 $C(R, A; S) \neq \emptyset$ は $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ を意味し, Conley 指数の安定性よりこの交わりは十分小さな摂動によってはずれないことがわかる.

4.2 Connection Matrix Pair

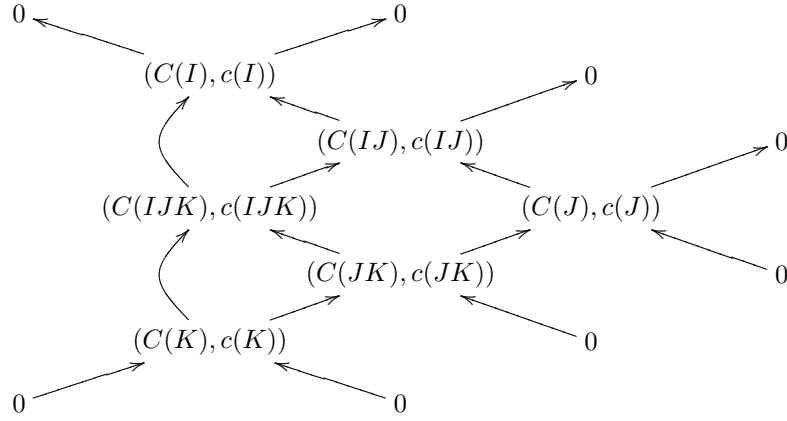
ここでは, 4.1 での議論を一般化し, 孤立不変集合の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ が与えられた時に, 各 $p \in \mathcal{P}$ に対する $\text{Con}^*(M(p))$ の情報から任意の $I \in \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$ で $\text{Con}^*(M(I))$ を求めることを考える. そのための道具が connection matrix pair である. connection matrix pair の定義の前にいくつか準備をする.

定義 4.6. 自己準同型付きコチェイン組み紐 (cochain complex braid with endomorphism) とは, $\text{End}(\delta V)$ の対象たちの族 $\mathcal{C} = \{(C(I), c(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ であって次の性質を持つものことである.

- (1) 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し次が完全であるような準同型 ρ, ι が存在する.

$$0 \longrightarrow (C(J), c(J)) \xrightarrow{\rho} (C(IJ), c(IJ)) \xrightarrow{\iota} (C(I), c(I)) \longrightarrow 0.$$

- (2) $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ に対し (1) の準同型たちのなす次の図式が可換である.

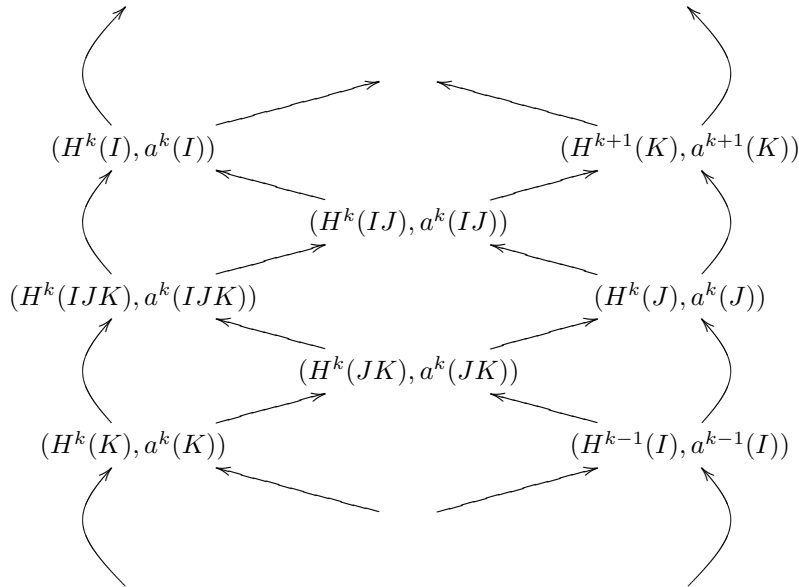


定義 4.7. 自己準同型付き次数加群組み紐(graded module braid with endomorphism) とは, $\text{End}(\mathcal{GV})$ の対象たちの族 $\mathcal{H} = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ であって, 次の性質を持つものことである.

(1) 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し次の長い列が完全であるような準同型 $\delta^*, \rho^*, \iota^*$ が存在する.

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} (H^n(J), a^n(J)) \xrightarrow{\rho^n} (H^n(IJ), a^n(IJ)) \xrightarrow{\iota^n} (H^n(I), a^n(I)) \xrightarrow{\delta^n} \dots$$

(2) $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ に対し (1) の準同型たちのなす次の図式が可換である.



自己準同型付きコチェイン組み紐と自己準同型付き次数加群組み紐の関係を考えてみると, コチェイン複体の短完全列のなす圏から加群の長完全列のなす圏へのホモロジー関手の自然性より次の命題が成立する.

命題 4.8. C が自己準同型付きコチェイン組み紐ならば, コホモロジー関手を C に作用されることにより自己準同型付き次数加群組み紐が得られる.

このようにして C から作った自己準同型付き次数加群組み紐を HC と書くことにする. 次にこれら組み紐たちとの準同型を定義しよう.

定義 4.9. 自己準同型付きコチェイン組み紐 $\mathcal{C} = \{(C(I), c(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ から $\mathcal{C}' = \{(C'(I), c'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ への準同型 $\Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ とは, $\text{End}(\delta\mathcal{V})$ の準同型の族 $\{\psi(I) : (C(I), c(I)) \rightarrow (C'(I), c'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ であって, 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し $\text{End}(\delta\mathcal{V})$ における図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (C(J), c(J)) & \longrightarrow & (C(IJ), c(IJ)) & \longrightarrow & (C(I), c(I)) \longrightarrow 0 \\ & & \psi(J) \downarrow & & \psi(IJ) \downarrow & & \psi(I) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (C'(J), c'(J)) & \longrightarrow & (C'(IJ), c'(IJ)) & \longrightarrow & (C'(I), c'(I)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が可換になるもののことをいう. また, 全ての $\psi(I)$ が同型であるとき Ψ は同型であるという.

定義 4.10. 自己準同型付き次数加群組み紐 $\mathcal{H} = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ から $\mathcal{H}' = \{(H'(I), a'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ への準同型 $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ とは, $\text{End}(\mathcal{G}\mathcal{V})$ の準同型の族 $\{\psi^*(I) : (H(I), a(I)) \rightarrow (H'(I), a'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ であって, 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し $\text{End}(\mathcal{G}\mathcal{V})$ での図式

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & (H(J), a(J)) & \longrightarrow & (H(IJ), a(IJ)) & \longrightarrow & (H(I), a(I)) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \psi^*(J) \downarrow & & \psi^*(IJ) \downarrow & & \psi^*(I) \downarrow \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & (H'(J), a'(J)) & \longrightarrow & (H'(IJ), a'(IJ)) & \longrightarrow & (H'(I), a'(I)) \xrightarrow{\delta} \dots \end{array}$$

が可換になるもののことをいう. また, 全ての $\psi^*(I)$ が同型であるとき Ψ は同型であるという.

自己準同型付きコチェイン組み紐の準同型から自己準同型付き次数加群組み紐の準同型が導かれることは, コチェイン複体の短完全列よりホモロジーを取る操作の関手性より明らか. また次の命題も成立する.

命題 4.11. $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ を自己準同型付き次数加群組み紐の準同型とする. このとき, 任意の $p \in \mathcal{P}$ で $\psi^*(p)$ が同型ならば, Ψ は同型である.

孤立不変集合 S の filtration pair (N, L) に対し, 補題 4.2 のときに見たようにコチェインの段階での同型 $i^\sharp : C^\sharp(N \cup f(L), L \cup f(L)) \rightarrow C^\sharp(N, L)$ があるので, これを用いて

$$F_{N,L}^\sharp := f^\sharp \circ i^{\sharp-1} : C^\sharp(N, L) \rightarrow C^\sharp(N, L)$$

と定義する. これの帰納的極限を取ったものを $(LC(S), Lf(S)) := L(C^\sharp(N, L), F_{N,L}^\sharp)$ と書くことにする.

さて, 孤立不変集合 S の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ が与えられたとき filtration $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ をとり,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathcal{M}) &= \{(LC(M(I)), Lf(M(I))) \mid I \in \mathcal{I}\}, \\ \mathcal{H}(\mathcal{M}) &= \{(CH^*(M(I)), \chi^*(M(I))) \mid I \in \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

とおくと, 次が成立する.

命題 4.12. $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ は自己準同型付きコチェイン組み紐であり, $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ は自己準同型付き次数加群組み紐である. さらに $\mathcal{H}(\mathcal{M}) \cong HC(\mathcal{M})$ である.

証明. まず $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ は自己準同型付きコチェイン組み紐であることをいう. 条件 (1) を示そう. 区間 I に対し,

$$Q_I := \{p \in \mathcal{P} \setminus I \mid \exists q \in I, p < q\}$$

とおくと, $(Q_I, I) \in \mathcal{I}_2$ であることがわかる. よって I との和区間 $Q_I I := Q_I \cup I$ がとれる. このとき, $Q_I, Q_I I \in \mathcal{A}$ であり $(N(Q_I I), N(Q_I))$ が $M(I)$ の filtration pair を与える. さらに $M(IJ)$ が $(M(I), M(J))$ によりアトラクター・リペラー分解されているとすると,

$$(N(Q_{IJ}IJ), N(Q_{IJ}I), N(Q_{IJ}))$$

がその filtration になっている. この 3 対からコチェイン複体の短完全列を作り L を作用させると,

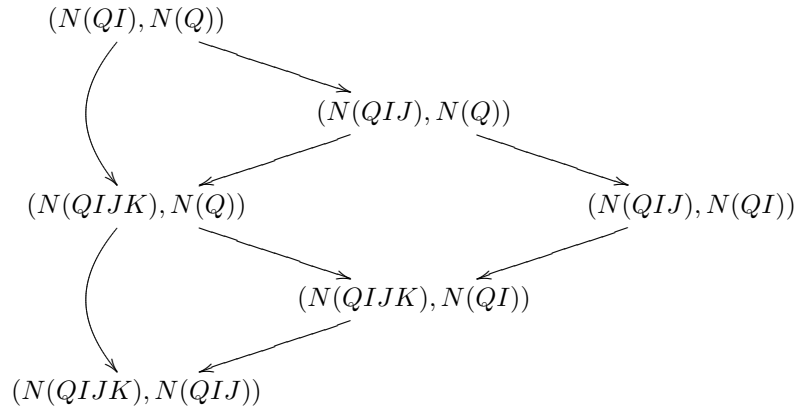
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & LC(M(J)) & \xrightarrow{\rho^\sharp} & LC(M(IJ)) & \xrightarrow{\iota^\sharp} & LC(M(I)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow Lf(M(J)) & & \downarrow Lf(M(IJ)) & & \downarrow Lf(M(I)) \\ 0 & \longrightarrow & LC(M(J)) & \xrightarrow{\rho^\sharp} & LC(M(IJ)) & \xrightarrow{\iota^\sharp} & LC(M(I)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が得られ, 条件 (1) をみたすことがわかる.

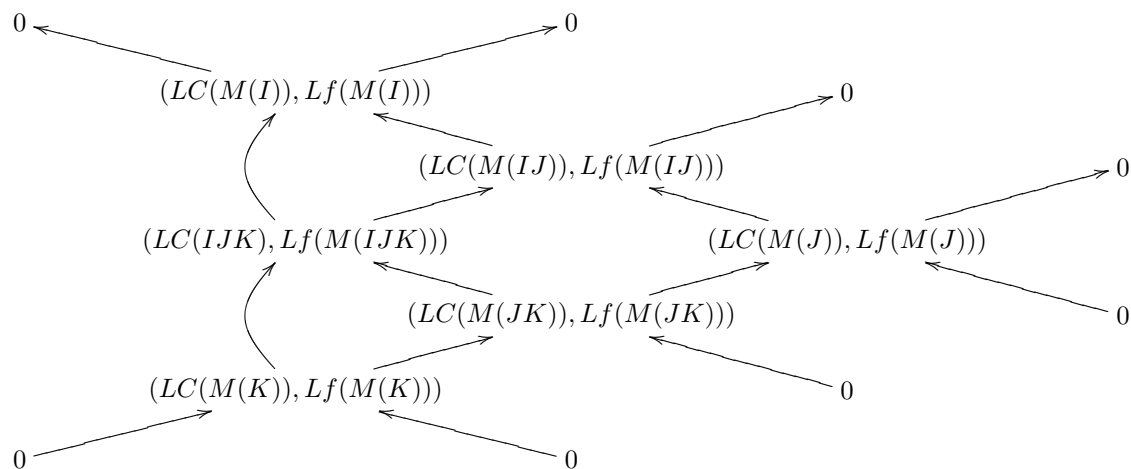
次に $(I, J, K) \in \mathcal{I}_3$ としよう. このとき,

S	A	R	filtration
$M(IJ)$	$M(I)$	$M(J)$	$(N(QIJ), N(QI), N(Q))$
$M(JK)$	$M(J)$	$M(K)$	$(N(QIJK), N(QIJ), N(QI))$
$M(IJK)$	$M(I)$	$M(JK)$	$(N(QIJK), N(QI), N(Q))$
$M(IJK)$	$M(IJ)$	$M(K)$	$(N(QIJK), N(QIJ), N(Q))$

という 4 つのアトラクター・リペラー分解がある (簡単のため $Q := Q_{IJK}$ と書いている). filtration の定義より次のような包含写像の可換な列がとれる.



この図式から、コチェイン複体の短完全列を作り、完全関手 L を作用させると、可換な図式



が得られる。よって条件 (2) をみだし、 $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ は自己準同型付きコチェイン組み紐である。この図式にコホモロジー関手を作用させることで自己準同型付き次数加群組み紐 $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ が得られるが、 L の完全性よりホモロジーをとる関手と L が可換なので (Massey [9], Appendix A.10), 定理 4.1 の証明と同様の議論により $HC(\mathcal{M})$ が $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ と同型であることがわかる。□

この $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ の他に、もうひとつ Conley 指数から作られる自己準同型付きコチェイン組み紐がある。命題 4.8 で見たように自己準同型付きコチェイン組み紐からホモロジーを取ることで自己準同型付き次数加群組み紐が得られたが、逆に自己準同型付き次数加群組み紐から自己準同型付きコチェイン組み紐を以下のように作ることができる。

自己準同型付き次数加群組み紐 $\mathcal{H} = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ に対し、 $p \in \mathcal{P}$ を区間 $\{p\}$ と見て、

$$C\Delta(I) := \bigoplus_{p \in I} H(p)$$

とおく。これは単に各 p について直和したものである。この定義には、区間 I での $H(I)$ の情報は要らないことに注意しよう。 $A : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ を線型写像とすると、 $C\Delta(I)$ の直和に基づき A を線型写像が成分である $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{P}|$ 行列だと思える。すなわち $A = (A_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}}$ で、 $A_{pq} : H(q) \rightarrow H(p)$ ということである。このとき $A(I) := (A_{pq})_{p,q \in I} : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I)$ において $A(I)$ を A の部分行列と見る。

定義 4.13. 半順序集合 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, <)$ に対し、行列 $A = (A_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}}$ が真に下三角であるとは $A_{pq} \neq 0$ ならば $p > q$ が成り立つことをいう。同様に、 $A = (A_{pq})$ が下三角であるとは $A_{pq} \neq 0$ ならば $p \geq q$ が成り立つことをいう。また、通常と同じく A の次数が $+1$ で $A^2 = 0$ であるとき A がコバウンダリ作用素であるという。

$\Delta = (\Delta_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}} : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ を真に下三角なコバウンダリ作用素としよう。このとき次が示せる。

命題 4.14. Δ が真に下三角なコバウンダリ作用素ならば、任意の $I \in \mathcal{I}$ に対して $\Delta(I)$ もまた真に下三角なコバウンダリ作用素である。

このことより、各 $I \in \mathcal{I}$ に対して $(C\Delta(I), \Delta(I))$ はコチェイン複体であることがわかる。同様に、 $a = (a_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}} : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ を下三角で次数が 0 のコチェイン写像、すなわち $\Delta \circ a = a \circ \Delta$ が成り立っているものとして。

命題 4.15. a が $(C\Delta(\mathcal{P}), \Delta)$ の下三角なコチェイン写像ならば, 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対して $a(I)$ もまた $(C\Delta(I), \Delta(I))$ の下三角なコチェイン写像である.

これらの命題より

$$C\Delta := \{((C\Delta(I), \Delta(I)), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

とおくと $C\Delta$ が自己準同型付きコチェイン組み紐であることがわかる. 実際,

$$C\Delta(IJ) = \bigoplus_{p \in IJ} H(\{p\}) = C\Delta(I) \oplus C\Delta(J)$$

なので $\rho: C\Delta(J) \rightarrow C\Delta(IJ)$ を直和への埋め込み, $\iota: C\Delta(IJ) \rightarrow C\Delta(I)$ を直和因子への射影とすればよい.

こうして自己準同型付き次数加群組み紐から自己準同型付きコチェイン組み紐が構成できたが, 命題 4.8 によりこの自己準同型付きコチェイン組み紐から再び自己準同型付き次数加群組み紐を作ることができる. この $HC\Delta$ を, $\mathcal{H}\Delta$ と書くことにしよう.

以上の構成を Conley 指数から作った $\mathcal{H}(M)$ に対して適用する. すなわち,

$$C\Delta(I) := \bigoplus_{p \in I} CH^*(M(p))$$

上に (Δ, a) が与えられているとしよう. このとき, 先の構成により得られた自己準同型付きコチェイン組み紐を $C\Delta(M)$, これからホモロジーを取って得られた自己準同型付き次数加群組み紐を $\mathcal{H}\Delta(M)$ と書くことにする.

今までに構成した組み紐たちを整理すると, filtration より作った自己準同型付きコチェイン組み紐 $\mathcal{C}(M)$ と, それからホモロジーを取って得られる自己準同型付き次数加群組み紐 $\mathcal{H}(M)$ がある. (Δ, a) を与えることにより $CH^*(M(p))$ の直和から作られる自己準同型付きコチェイン組み紐が $C\Delta(M)$, それからホモロジーを取って得られる自己準同型付き次数加群組み紐が $\mathcal{H}\Delta(M)$ であった.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(M) & \xrightarrow{H} & \mathcal{H}(M) \\ & \searrow^{(\Delta, a)} & \vdots \\ C\Delta(M) & \xrightarrow{H} & \mathcal{H}\Delta(M) \end{array}$$

もし, うまく (Δ, a) を取ることにより $\mathcal{H}\Delta(M)$ が $\mathcal{H}(M)$ と同型になったとしたら, 各 Morse 成分の Conley 指数から S 全体やそれに含まれる $M(I)$ たちの Conley 指数を一気に知ることができる. そのような都合の良い (Δ, a) を connection matrix pair と呼ぶ.

定義 4.16. 真に下三角なコバウンダリ作用素 Δ と下三角なコチェイン写像 a の対 (Δ, a) が Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ の connection matrix pair であるとは $\mathcal{H}\Delta(M)$ が $\mathcal{H}(M)$ と同型であることをいう.

抽象的な自己準同型付き次数加群組み紐に対しても, 次のように connection matrix が定義される.

定義 4.17. 真に下三角なコバウンダリ作用素 Δ と下三角なコチェイン写像 a の対 (Δ, a) が自己準同型付き次数加群組み紐 \mathcal{H} の connection matrix pair であるとは $\mathcal{H}\Delta$ が \mathcal{H} と同型であることをいう.

定理 4.18. 任意の孤立不変集合 $SMorse$ 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ に対し *connection matrix pair* が存在する.

この定理の証明は抽象的な自己準同型付き次数加群組み組に対する代数的な議論によって行なわれる. すなわち次の定理により導かれる.

定理 4.19 (Richeson [20]). 自己準同型付き次数加群組み組 \mathcal{H} がある自己準同型付きコチェイン組み組 \mathcal{C} により $\mathcal{H} \cong H\mathcal{C}$ となるならば, \mathcal{H} の *connection matrix* が存在する.

この定理の Richeson [20] での証明を整理したものを以下に記す. まず次のような定義をする.

定義 4.20. 自己準同型付きコチェイン組み組 $\mathcal{E} = \{(E(I), \delta(I), e(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ が標準形であるとは, 各 $p \in \mathcal{P}$ に対し $E(p) = E(p)^- \oplus HE(p) \oplus E(p)^+$ と分裂し, $E(I) = \bigoplus_{p \in \mathcal{I}} E(p)$ かつ $\delta(I) = (\delta_{p,q})_{p,q \in \mathcal{I}}$, $e(I) = (e_{p,q})_{p,q \in \mathcal{I}}$ とおいた時に次の 2 つの条件が成立することをいう.

(1)

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & id \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q = p \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & q < p \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(2)

$$e_{p,q} = \begin{cases} \begin{pmatrix} e(p,p)_1 & e(p,p)_2 & e(p,p)_3 \\ 0 & e(p,p)_5 & e(p,p)_6 \\ 0 & 0 & e(p,p)_1 \end{pmatrix}, & q = p \\ \begin{pmatrix} e(p,q)_1 & e(p,q)_2 & e(p,q)_3 \\ e(p,q)_4 & e(p,q)_5 & e(p,q)_6 \\ e(p,q)_7 & e(p,q)_8 & e(p,q)_9 \end{pmatrix}, & q < p \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

(1) より $H^*(E(p)) = \ker \delta(p) / \text{im } \delta(p) \cong HE(p)$ および $(E(p)^-)^n = (E(p)^+)^{n-1}$ が成り立つことに注意.

このように定義した標準形の場合の *connection matrix pair* をまず構成し, 一般の場合がそれに帰着できることを次に証明する.

命題 4.21. 自己準同型付き次数加群組み組 \mathcal{H} が, ある標準形の自己準同型付きコチェイン組み組 $\mathcal{E} = \{(E(I), \delta(I), e(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ により $\mathcal{H} = H\mathcal{E}$ と表わされるならば, \mathcal{H} の *connection matrix pair* が存在する.

証明. $H(p) = H^*(E(p)) \cong HE(p)$ により *connection matrix pair* は $\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} HE(p)$ 上で定義すればよい.

$$\Delta = (\Delta_{p,q})_{p,q \in \mathcal{P}}, \quad a = (a_{p,q})_{p,q \in \mathcal{P}} : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} HE(p) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} HE(p)$$

を,

$$\Delta_{p,q} = \begin{cases} d_{p,q}, & q < p \\ 0, & \text{その他} \end{cases}, \quad a_{p,q} = \begin{cases} e(p,q), & q \leq p \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する. 構成より Δ は真に下三角なコバウンダリ作用素であることは明らか. a が下三角なコチェイン写像であることを示そう. まず, \mathcal{P} の半順序を適当に全順序に拡張し $\mathcal{P} = \{1, 2, \dots, n\}$ と思う. $e(I)$ はコチェイン写像なので $e(I) \circ \delta(I) = \delta(I) \circ e(I)$ が成り立つ. $E(p) = E(p)^- \oplus HE(p) \oplus E(p)^+$ と分裂するので $e(I) \circ \delta(I), \delta(I) \circ e(I)$ を $3n \times 3n$ 行列と見よう. このとき $n \times n$ 行列 $a(I) \circ \Delta(I)$ の (i, j) 成分は $e(I) \circ \delta(I)$ の $(3i-1, 3j-1)$ 成分であり, $\Delta(I) \circ a(I)$ の (i, j) 成分は $\delta(I) \circ e(I)$ の $(3i-1, 3j-1)$ 成分であることが実際に掛け算を実行することにより示せる. よって $e(I) \circ \delta(I) = \delta(I) \circ e(I)$ から $a(I) \circ \Delta(I) = \Delta(I) \circ a(I)$ がわかり, a は定義より下三角なので, 結局 a は下三角なコチェイン写像であることがわかった.

この (Δ, a) が \mathcal{H} の connection matrix pair であることを示そう. まず, 自己準同型付きコチェイン組み紐準同型 $\Psi = (\psi_{p,q})_{p,q \in \mathcal{P}} : \mathcal{E}\Delta \rightarrow \mathcal{E}$ を構成する. 仮定より $\Psi : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} HE(p) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} E(p)$ として作ればよいので, $\psi_{p,q} : HE(q) \rightarrow E(p)$ を

$$\psi_{p,q} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ id \\ 0 \end{pmatrix}, & p = q \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & p \neq q \end{cases}$$

として定義する. Ψ の構成より $\psi(I) \circ \Delta(I) = \delta(I) \circ \psi(I)$ となることがわかり, よって Ψ はコチェイン写像である. このとき任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し包含写像および射影を横の写像とする $\delta\mathcal{V}$ での図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in J} HE(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in IJ} HE(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in I} HE(p) \longrightarrow 0 \\ & & \psi(J) \downarrow & & \psi(IJ) \downarrow & & \psi(I) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in J} E(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in IJ} E(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in I} E(p) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が可換となる. この図式は自己準同型付きではないが, ホモロジーを取った段階において自己準同型付き次数加群組み紐の同型 $\Psi : \mathcal{H}\Delta \rightarrow \mathcal{H}$ が導かれることを証明する. すなわち, 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対し次の2つを言う.

- (1) $\psi(I)$ から導かれる $\psi^*(I)$ が同型である.
- (2) $a(I), e(I)$ から導かれる写像を $a^*(I), e^*(I)$ とすると, $\psi^*(I) \circ a^*(I) = e^*(I) \circ \psi^*(I)$ が成立する.

まず (1) を示す. 任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し Δ の形より $HE(p)$ はホモロジーを取っても変化せず, $E(p)$ はホモロジーを取ると第2成分 $HE(p)$ のみ残るので, $\psi(p)$ の第2成分がそのまま $\psi^*(p)$ となり, よって $\psi^*(p)$ は同型である. ここで命題 4.11 を用いると任意の $I \in \mathcal{I}$ に対し $\psi^*(I)$ が同型となり (1) は示された.

次に (2) を示そう. $I \in \mathcal{I}$ を 1 つ決める. \mathcal{P} 上の半順序を拡張して全順序にし, しかも $I = \{1, \dots, r\}$ となるようにしておく. $\psi^*(I) \circ a^*(I) = e^*(I) \circ \psi^*(I)$ を言うためには, 任意の $\alpha \in \ker \Delta(I)$ に対し $(e(I) \circ \psi(I) - \psi(I) \circ a(I))(\alpha) \in \text{im } \delta(I)$ を示せばよい. この線型写像を計算すると,

$$e(I) \circ \psi(I) - \psi(I) \circ a(I) = \begin{pmatrix} e(1,1)_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e(2,1)_2 & e(2,2)_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e(2,1)_8 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e(3,1)_2 & e(3,2)_2 & e(3,3)_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e(3,1)_8 & e(3,2)_8 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(r,1)_2 & e(r,2)_2 & e(r,3)_2 & \cdots & e(r,r)_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e(r,1)_8 & e(r,2)_8 & e(r,3)_8 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という $3r \times r$ 行列が得られる. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$ とおくと $\alpha \in \ker \Delta(I)$ より

$$\begin{aligned} d_{2,1}\alpha_1 &= 0 \\ d_{3,1}\alpha_1 + d_{3,2}\alpha_2 &= 0 \\ d_{4,1}\alpha_1 + d_{4,2}\alpha_2 + d_{4,3}\alpha_3 &= 0 \\ &\vdots \\ d_{r,1}\alpha_1 + d_{r,2}\alpha_2 + \cdots + d_{r,r-1}\alpha_{r-1} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. $(e(I) \circ \psi(I) - \psi(I) \circ a(I))(\alpha)$ を求めると,

$$(e(I) \circ \psi(I) - \psi(I) \circ a(I))(\alpha) = \begin{pmatrix} e(1,1)_2\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ e(2,1)_2\alpha_1 + e(2,2)_2\alpha_2 \\ 0 \\ e(2,1)_8\alpha_1 \\ \vdots \\ e(r,1)_2\alpha_1 + e(r,2)_2\alpha_2 + \cdots + e(r,r)_2\alpha_r \\ 0 \\ e(r,1)_8\alpha_1 + e(r,2)_8\alpha_2 + \cdots + e(r,r-1)_8\alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e(1,1)_2\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ e(2,1)_2\alpha_1 + e(2,2)_2\alpha_2 \\ 0 \\ e(2,2)_2d_{2,1}\alpha_1 \\ \vdots \\ e(r,1)_2\alpha_1 + e(r,2)_2\alpha_2 + \cdots + e(r,r)_2\alpha_r \\ 0 \\ e(r,r)_2d_{r,1}\alpha_1 + e(r,r)_2d_{r,2}\alpha_2 + \cdots + e(r,r)_2d_{r,r-1}\alpha_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e(1,1)_2\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ e(2,1)_2\alpha_1 + e(2,2)_2\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e(r,1)_2\alpha_1 + e(r,2)_2\alpha_2 + \cdots + e(r,r)_2\alpha_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \delta(I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e(1,1)_2\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ e(2,1)_2\alpha_1 + e(2,2)_2\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ e(r,1)_2\alpha_1 + e(r,2)_2\alpha_2 + \cdots + e(r,r)_2\alpha_r \end{pmatrix} \in \text{im } \delta(I)$$

となる。2つ目の等式は $\delta(I) \circ e(I) = e(I) \circ \delta(I)$ の両辺を比較すると導かれる。3つ目の等式は先に $\alpha \in \ker \Delta(I)$ より示した等式を代入する。最後の等式は定義 4.20 での $\delta_{p,q}$ の分解より明らか。□

命題 4.22. 任意の自己準同型付きコチェイン組み組 \mathcal{C} は、ある標準形の自己準同型付きコチェイン組み組と同型である。

証明. $\mathcal{C} = \{(C(I), \delta_C(I), c(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ とおく。 $\mathcal{G}\mathcal{V}$ の短完全列 $0 \rightarrow C(J) \rightarrow C(IJ) \rightarrow C(I) \rightarrow 0$ はベクトル空間の性質より分裂し、 $C(IJ) \cong C(J) \oplus C(I)$ となる。この分裂を繰り返して $C(I) = \bigoplus_{p \in I} C(p)$ を得る。さらに、各 $C(p)$ を $C^n(p) \cong \text{im } \delta_C^{n-1}(p) \oplus H^n(C(p)) \oplus \text{im } \delta_C^n(p)$ と分裂させ

る. これを $C(p) = C(p)^- \oplus H(C(p)) \oplus C(p)^+$ とおく. ここで $C(p)^- \cong \text{im } \delta_C^{n-1}(p)$, $H(C(p)) \cong H^n(C(p))$, $C(p)^+ \cong \text{im } \delta_C^n(p)$ である. このとき $C(I) = (c_{p,q})_{p,q \in I}$, $\delta_C(I) = (\delta_{p,q})_{p,q \in I}$ とおくと,

$$c_{p,p} = \begin{pmatrix} c(p,p)_1 & c(p,p)_2 & c(p,p)_3 \\ 0 & c(p,p)_5 & c(p,p)_6 \\ 0 & 0 & c(p,p)_1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{p,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と分解されている.

$p < q$ に対し, $C(p), C(q)$ の分裂に対応する δ_C の $H(C(q)) \rightarrow H(C(p))$ 成分 $d(p,q)_5$ を $d_{p,q}$ と書く. ここで $E(I) = C(I)$ とおき, δ_E を今作った $d_{p,q}$ を用いて定義 4.20 の (1) のように構成するとコチェイン複体 $(E(I), \delta_E(I))$ をが得られる. このとき線型写像 $C(I) \rightarrow E(I)$ を次のように定義する. まず $S(I) = (S_{p,q})_{p,q \in I}$ とおき,

$$S_{p,q} = \begin{cases} \begin{pmatrix} id & 0 & 0 \\ 0 & id & 0 \\ 0 & 0 & id \end{pmatrix}, & q = p \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d(p,q)_6 & 0 & 0 \\ d(p,q)_1 & d(p,q)_2 & d(p,q)_3 \end{pmatrix}, & q < p \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義する. この行列では, $(C(p)^-)^n = (C(p)^+)^{n-1}$ により $d(p,q)_i$ たちをもととの定義域, 値域と異なる位置に配置している. この S は線型写像として可逆である. 実際, 有限次元ベクトル空間での掃き出し法と同様にして具体的に逆行列を書き下すことができる.

この S と同様の構成により C からある標準形の自己準同型付きコチェイン組み紐 \mathcal{E} への同型が作れるのだが, コチェイン写像の条件をみたすようにするために $C(I)$ 分裂のさせ方を変える操作をしなければならない. 以下これを見ていこう.

始めに示すことは, コバウンダリ写像 δ_E が定義 4.20 の (1) をみたすようなコチェイン複体 $E(I)$ があって, あるコチェイン写像 $S(I)$ により $C(I)$ と同型になるということである. これを示すために, \mathcal{P} の順序を適当に全順序に拡張して $\mathcal{P} = \{1, \dots, r\}$, $I_k = \{k, \dots, r\}$ とおき, まず区間 I_k について帰納的に構成していく. ただし k は r から 1 へと減って行くものとする.

$k = r$ の時は先に構成した $E(I_r)$, $S(I_r)$ をそのまま用いる. このとき定義より $S(I_r)$ は恒等写像であり, この場合

$$\delta_E(I_r) = \delta_C(I_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & id \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $S(I_r)$ はコチェイン写像であり, 主張は成立している.

主張は $k = m + 1$ まで正しいと仮定する. $I = I_m$, $I' = I_{m+1}$ とおくと帰納法の仮定によりコチェイン複体 $(E(I'), \delta_E)$ とコチェイン写像 $S(I')$ があって $\delta_E(I') = S(I') \circ \delta_C(I') \circ S(I')^{-1}$ である. よって各 $C(p)$ の分裂のさせ方を適当に取りかえると, $\delta_C(I')$ も $\delta_E(I')$ と同様に標準形の定義 (1) の形であるとしてよい. この分裂のにより, 再び $(E(I), \delta_E)$, $S(I)$ を構成し直す. このときやは

り $S(I)$ は同型である. δ_C が下三角であることから

$$\delta_C(I) = \begin{pmatrix} \delta_C(m, m) & 0 \\ * & \delta_C(I') \end{pmatrix}$$

という形なので, $\delta_C(I)$ を

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & id & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+1, m)_1 & d(m+1, m)_2 & d(m+1, m)_3 & 0 & 0 & id & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+1, m)_4 & d(m+1, m)_5 & d(m+1, m)_6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+1, m)_7 & d(m+1, m)_8 & d(m+1, m)_9 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+2, m)_1 & d(m+2, m)_2 & d(m+2, m)_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+2, m)_4 & d(m+2, m)_5 & d(m+2, m)_6 & 0 & d_{m+2, m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(m+2, m)_7 & d(m+2, m)_8 & d(m+2, m)_9 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d(r, m)_1 & d(r, m)_2 & d(r, m)_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & id \\ d(r, m)_4 & d(r, m)_5 & d(r, m)_6 & 0 & d_{r, m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d(r, m)_7 & d(r, m)_8 & d(r, m)_9 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくことができる. この形に変形してから $\delta_E(I) \circ S(I) = S(I) \circ \delta_C(I)$ の両辺を計算し, $(\delta_C(I))^2 = 0$ による関係を代入すると $\delta_E(I) \circ S(I) = S(I) \circ \delta_C(I)$ が成立することが示される. よって $k = m$ においても主張は正しい.

以上の操作をくり返すと, 最終的に $I = \mathcal{P}$ において主張が示される. 構成より S はもとの半順序において下三角なので, 命題 4.15 と同様に任意の $I \in \mathcal{I}$ で $S(I)$ はコチェイン写像になることがわかる.

さらに, $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し \mathcal{GV} の図式として

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C(J) & \longrightarrow & C(IJ) & \longrightarrow & C(I) \longrightarrow 0 \\ & & S(J) \downarrow & & S(IJ) \downarrow & & S(I) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E(J) & \longrightarrow & E(IJ) & \longrightarrow & E(I) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が可換になる. ここで $e(I) := S(I) \circ c(I) \circ S^{-1}(I)$ とおくと, $e(I) \circ \delta_E(I) = \delta_E(I) \circ e(I)$ となる. よって $\mathcal{E} = \{(E(I), \delta(I), e(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ は標準形の自己準同型付きコチェイン組み紐となる. また構成より S は下三角なので, 命題 4.15 と同様に任意の $I \in \mathcal{I}$ で $S(I)$ はコチェイン写像になる. よって S は自己準同型付きコチェイン組み紐同型となり, 命題は示された. \square

定理 4.19 は, 命題 4.21 と命題 4.22 より直ちに導かれる.

5 Singular Transition Matrix Pair

Hausdorff 距離の定義をまず思い出そう. X をコンパクト距離空間, d をその上の距離とする. X の空でない閉集合全体のなす集合を $\mathcal{F}(X)$ とおく. 関数 $h, \rho : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ を

$$h(A, B) = \inf \{ \varepsilon \mid A \text{ は } B \text{ の } \varepsilon \text{ 近傍に含まれる} \},$$

$$\rho(A, B) = \max \{ h(A, B), h(B, A) \}$$

と定義すると ρ は $\mathcal{F}(X)$ 上の距離関数であり, それによって $\mathcal{F}(X)$ がコンパクト距離空間になる. この距離を Hausdorff 距離といい, 次の補題が成立する.

補題 5.1. $\{A_n\}$ を $\mathcal{F}(X)$ の収束列とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}, x_n \in A_n, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\}.$$

5.1 パラメータ空間との直積における Morse 分解

Λ を $[0, 1]$ を含む開区間とし, この上での 1 パラメータ族 f_λ を扱うことにする. また $[0, 1] \subset \text{int } \bar{\Lambda} \subset \Lambda$ となる閉区間 $\bar{\Lambda}$ を適当に選んでおく.

$$\pi_X : X \times \Lambda \rightarrow X, \quad \pi_\Lambda : X \times \Lambda \rightarrow \Lambda$$

をそれぞれ X, Λ への射影とする.

Morse 分解が Λ 上連続するという概念を定義しよう. まず f_λ の孤立不変集合たちのなす集合上に, ある孤立近傍によって連続するという関係を推移律により拡張した同値関係を入れる. S と S' がこの関係を持つとき, S と S' は連続性により関係づけられているということにする.

定義 5.2. $\mathcal{M}(\mathcal{P}, \lambda) = \{M_\lambda(p) \mid p \in \mathcal{P}, \lambda \in \Lambda\}$ がパラメータ空間 Λ 上に連続する Morse 分解であるとは, Λ 上に連続する孤立不変集合 $\{S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の Morse 分解を各 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, \lambda)$ が与えていて, さらに各 $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ および $p \in \mathcal{P}$ に対し $M_\lambda(p)$ と $M_{\lambda'}(p)$ は連続性により関係づけられた孤立不変集合であることをいう.

今, 任意の $\lambda \in \Lambda$ において N が f_λ の孤立近傍であると仮定する. N により Λ 上連続する孤立不変集合を

$$S_\lambda := \text{Inv}(N, f_\lambda)$$

とおく. 各 S_λ は Morse 分解されていてその Morse 分解が Λ 上連続していると仮定し, 各 λ における \mathcal{P} 上の map defined order を \langle_λ と書くことにする.

パラメータ空間 Λ 上に少しずつパラメータをずらしていく写像 g_ϵ を導入しよう.

$$g_\epsilon(\lambda) := \lambda + \epsilon\lambda(\lambda - 1)$$

とおく. $\epsilon \geq 0$ を小さくとり区間 Λ 上で g_ϵ が単調増加であるとする. この g_ϵ を用いて

$$F_\epsilon(x, \lambda) := (f_\lambda(x), g_\epsilon(\lambda))$$

と定義する. g_ϵ によりパラメータを 1 から 0 へずらしつつ, 同時にそのパラメータに対応する f_λ で X 上を動いていくものである. このとき $F_0(x, \lambda) = (f_\lambda(x), \lambda)$ となるがこちらはパラメータをずらさないことに注意.

命題 5.3. ϵ を十分小さくとると, $N \times \bar{\Lambda}$ は F_ϵ に対し孤立近傍である.

証明. 背理法を用いる. 命題を否定すると, ある数列 $\epsilon_n \rightarrow 0$ がとれ任意の n に対し $N \times \bar{\Lambda}$ が F_{ϵ_n} の孤立近傍でないことができる. このとき, 定義より $\partial(N \times \bar{\Lambda}) \cap \text{Inv}(N \times \bar{\Lambda}, F_{\epsilon_n}) \neq \emptyset$ である. よって各 n に対し完全軌道 $\sigma_n : \mathbb{Z} \rightarrow N \times \bar{\Lambda}$, $\sigma_n(0) \in \partial(N \times \bar{\Lambda})$ を選ぶことができる. F_{ϵ_n} の形から, $\text{Inv}(N \times \bar{\Lambda}, F_{\epsilon_n}) \subset N \times [0, 1]$ であることは明らかなので, 結局 $\sigma_n(0) \in \partial N \times [0, 1]$ であることがわかる. $\partial N \times [0, 1]$ はコンパクトなので, $\sigma_n(0)$ の収束部分列をとり, 番号を取り直して $\sigma_n(0)$ が収束するとし $z_0 = (x_0, \lambda_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(0)$ とおく. とり方より $x_0 \in \partial N$ である. これから示すのは, $z_0 \in \text{Inv}(N \times [0, 1], F_0|_{X \times [0, 1]})$ となることである. これが言えたとすると, F_0 によってパラメータ方向は動かないので $x_0 \in \partial N \cap \text{Inv}(N, f_{\lambda_0})$ がわかり, N が任意の λ で孤立近傍であることに矛盾する. 命題 2.1 を用いると, これを示すには任意の $m \geq 0$ に対し $z_0 \in \text{Inv}^m(N \times [0, 1], F_0|_{X \times [0, 1]})$ が言えればよい. そこで $\sigma_n(-1)$ から収束部分列をとりその収束先を z_{-1} とする. 以下同様に部分列を取る作業を続け $z_{-m}, \dots, z_0, \dots, z_m$ に対し $\sigma_n(k) \rightarrow z_k$ とする. 明らかに z_k たちはすべて $N \times [0, 1]$ に入っている. このとき d を $X \times \Lambda$ 上の距離関数とすると, 三角不等式により任意の n および $k = -m, \dots, m-1$ に対して

$$\begin{aligned} d(F_0(z_k), z_{k+1}) &\leq d(F_0(z_k), F_0(\sigma_n(k))) + d(F_0(\sigma_n(k)), z_{k+1}) \\ &\leq d(F_0(z_k), F_0(\sigma_n(k))) + d(F_0(\sigma_n(k)), F_{\epsilon_n}(\sigma_n(k))) + d(F_{\epsilon_n}(\sigma_n(k)), z_{k+1}). \end{aligned}$$

が成立するが,

$$\begin{aligned} F_0(z_k) &= F_0(\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_0(\sigma_n(k)), \\ z_{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(k+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\epsilon_n}(\sigma_n(k)). \end{aligned}$$

により N を大きくすると先の不等式の右辺の第一項, 第三項は任意に小さくできる. また, $X \times \Lambda$ 上で F_{ϵ_n} は F_0 に一樣収束するので第二項も任意に小さくとれる. よって $d(F_0(z_k), z_{k+1}) = 0$ であり, $F_0(z_k) = z_{k+1}$ となるので求める $z_0 \in \text{Inv}^m(N \times [0, 1], F_0)$ は示された. \square

以後, ϵ はこの補題をみたすよう十分小さくとってあることにする. この補題により存在する孤立不変集合を

$$\hat{S}_\epsilon := \text{Inv}(N, F_\epsilon)$$

とおく. こんどはこの \hat{S}_ϵ の Morse 分解を S_0, S_1 の Morse 分解から作ることを試みよう. $A \subset X$ に対し $A_\lambda := A \times \{\lambda\} \subset X \times \Lambda$ とおく.

補題 5.4. A が f_0 の孤立不変集合ならば A_0 は F_ϵ の孤立不変集合である. 同様に, A が f_1 の孤立不変集合ならば A_1 は F_ϵ の孤立不変集合である.

証明. $\text{Inv}(K, f_0) = A$ となる孤立近傍 K をとる. $\gamma > 0$ を十分小さくとり $K' := K \times [-\gamma, \gamma] \subset X \times \Lambda$ とおく. $(x, \lambda) \in K'$ とすると, $\lambda \neq 0$ ならば (x, λ) の F_ϵ による完全軌道で K' にとどまるものはない. また, $(x, 0) \in \text{Inv}(K', F_\epsilon)$ とすると $\lambda = 0$ 上では F_ϵ は f_0 と一致するので $(x, 0) \in \text{Inv}(K, f_0) \times \{0\} \subset \text{int } K \times \{0\} \subset \text{int } K'$ が成立し, よって $\text{Inv}(K', F_\epsilon) \subset \text{int } K'$ なので K' は孤立近傍である. $\lambda = 0$ 上で F_ϵ が f_0 と一致することから, $\text{Inv}(K', F_\epsilon) = \text{Inv}(K, f_0) \times \{0\} = A \times \{0\} = A_\lambda$ であることもわかる. A_1 についても同様. \square

今考えている状況では S_λ 上に連続する Morse 分解が与えられているが, この中の S_0 と S_1 の Morse 分解を足し合わせると, \hat{S}_ϵ の F_ϵ での Morse 分解になることがわかる. 実際には, より強く S_0, S_1 上に任意の Morse 分解を与えたとき, 次が成り立つ.

補題 5.5. $\{M_0(p) \mid p \in (\mathcal{P}, <_0)\}$ が S_0 の Morse 分解, $\{M_1(r) \mid r \in (\mathcal{Q}, <_1)\}$ が S_1 の Morse 分解をなすとする. このとき $\{M(p) \mid p \in (\mathcal{P}, <_0)\} \cup \{M(r) \mid r \in (\mathcal{Q}, <_1)\}$ は \hat{S}_ϵ の F_ϵ での Morse 分解になる. 実際, $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 上に

$$\begin{aligned} p \ll q & \quad \text{任意の } p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q} \text{ で} \\ p \ll p' & \quad p, p' \in \mathcal{P}, p <_0 p' \text{ のとき} \\ q \ll q' & \quad q, q' \in \mathcal{Q}, q <_1 q' \text{ のとき} \end{aligned}$$

と定義すると, Morse 分解の仮定をみたす半順序である.

証明. 上のように定義した \ll が $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 上の半順序であることは明らか. 補題 5.4 により各 $M_0(p)$, $M_1(q)$ は孤立不変集合であり, また互いに交わらないことも明らか. よって, \hat{S}_ϵ 内の任意の完全軌道 σ の α および ω 極限集合がこれらの Morse 成分に順序 \ll に沿って入ることを見ればよい. 軌道 σ のうち一点でも S_0 に入っているとすると, F_ϵ の定義より σ 全体が S_0 に入らなくてはならない. よって, $\{M_0(p) \mid p \in (\mathcal{P}, <_0)\}$ が S_0 の Morse 分解であることから σ の極限集合は $p <_0 p'$ があって $\omega(\sigma(0)) \subset M_0(p)$, $\alpha(\sigma) \subset M_0(p')$ となっているが, \ll の定義より $p \ll p'$ でもあるのでこの場合は Morse 分解の条件を満たしている. 軌道 σ が S_1 に入っている時も同様. 従って $\sigma(k) = (x(k), \lambda(k))$ と書いた時に $0 < \lambda(k) < 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) となる場合を考えればよい. この時明らかに $\omega(\sigma(k)) \subset S_0$, $\alpha(\sigma) \subset S_1$ となるが, ある $p \in \mathcal{P}$ があって $\omega(x, \lambda) \subset M_0(p)$ となること, およびある $q \in \mathcal{Q}$ があって $\alpha(\sigma) \subset M_1(q)$ が成立することを示せば, \ll の定義より $p \ll q$ なので Morse 分解の条件は成立する. どちらも同じなので $\alpha(\sigma)$ について示すことにする.

まず, ある q があって $\alpha(\sigma) \cap M_1(q) \neq \emptyset$ である. なぜなら $\alpha(\sigma)$ は F_ϵ 不変集合なので, f_1 不変でもある. よって $\alpha(\sigma)$ の点の f_1 での極限集合も $\alpha(\sigma)$ に含まれることになり, Morse 分解の定義よりそれらはいずれかの Morse 成分に含まれるからである. この q を固定し, $\alpha(\sigma) \subset M_1(q)$ となることをこれから示す. 背理法を用いる. $\alpha(\sigma) \not\subset M_1(q)$ とすると $\alpha(\sigma)$ は他の Morse 成分か connecting orbit と交わるが, connecting orbit と交わる場合もその connecting orbit で $M_1(q)$ と結ばれる Morse 成分が $\alpha(\sigma)$ と交わることになる. よって $\alpha(\sigma) \cap M_1(q') \neq \emptyset$ としよう. 一般性を失うことなく, $q \not<_1 q'$ とする. $I := \{r \in \mathcal{Q} \mid r \leq_1 q\}$ とおくと I は吸引的区間であり $q' \notin I$ である. $(I, \mathcal{Q} \setminus I) \in \mathcal{I}_2(\mathcal{Q}, <_1)$ なので, 命題 3.3 より $(M_1(I), M_1(\mathcal{Q} \setminus I))$ が S_1 のアトラクター・リペラー分解を与えている. このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し, $M_1(q) \subset M_1(I)$ から $M_1(q') \subset M_1(\mathcal{Q} \setminus I)$ への f_1 による ϵ 擬軌道が存在することを示そう. まず, F_0 が $N \times [0, 1]$ 上一様連続なので, ある δ があって $d(x, x') \leq \delta$ ならば $d(F_0(x), F_0(x')) < \epsilon/3$ とできる. 次に, $\lambda' \leq \lambda$ ならば $d(f_1(x), f_\lambda(x)) < \epsilon/3$ が任意の $x \in N$ で成立するような λ' をとる. F_ϵ の定義よりある K' があって $k \leq K'$ ならば $\lambda' \leq \lambda(k)$ となる. また, $\alpha(\sigma)$ は S_1 に収束するのである K'' があって $k \leq K''$ ならば $d(\sigma(k), S_1) < \min(\epsilon/3, \delta)$ とできる. $K = \min(K', K'')$ とおこう. α 極限集合の定義より $k \leq K$ がとれて $d(\sigma(k), M_1(q)) < \min(\epsilon/3, \delta)$ とできる. 同様に, $k' < k$ がとれて $d(\sigma(k'), M_1(q')) < \min(\epsilon/3, \delta)$ とできる. K の定義により, 各 $\sigma(i)$, $k' \leq i \leq k$ の $\min(\epsilon/3, \delta)$ 近傍に S_1 の点があるので, それを x_i とする. S_1 上では $F_0 = f_1$ なので,

$$\begin{aligned} d(f_1(x_i), x_{i+1}) & \leq d(f_1(x_i), F_\epsilon(\sigma(i))) + d(F_\epsilon(\sigma(i)), x_{i+1}) \\ & \leq d(f_1(x_i), f_1(\sigma(i))) + d(F_0(\sigma(i)), F_\epsilon(\sigma(i))) + d(\sigma(i+1), x_{i+1}) \\ & < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

となる. S_1 上の二点の距離は $N \times \Lambda$ 上で見ても N 上で見ても同じなので, アトラクターに含まれ

る $M_1(q)$ から、リペラーの $M_1(q')$ への f_1 による ε 擬軌道が得られた。今、 ε は任意なのでこれは命題 3.1 に反し矛盾。 \square

以上により \hat{S}_ε の Morse 分解が得られたが、これから我々はこの Morse 分解が $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときにどのように変化するかを考えてみよう。もちろん $\varepsilon = 0$ においては \hat{S}_ε に対して構成したような Morse 分解は存在しないが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限に関する情報から $\varepsilon = 0$ での様子がある程度わかるのではないかと期待される。

具体的には F_ε での connecting orbit が $\varepsilon \rightarrow 0$ のときにどのように振る舞うかを調べてみよう。 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ をとり、任意の n で $C(M_1(q), M_0(p); \hat{S}_{\varepsilon_n}) \neq \emptyset$ であると仮定しよう。 $C(M_1(q), M_0(p); \hat{S}_{\varepsilon_n})$ に含まれる完全軌道を任意に選び、 c_n と書く。このとき $\bar{c}_n := \text{cl}(c_n) \in \mathcal{F}(N \times [0, 1])$ であり、 $\mathcal{F}(N \times [0, 1])$ が Hausdorff 距離でコンパクトなので $\{\bar{c}_n\}$ は収束部分列を持つ。番号をつけ直して $\{\bar{c}_n\}$ が収束するとし、 $\bar{c} := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{c}_n$ とおく。

このとき各 λ において $\bar{c}_\lambda = \bar{c} \cap N_\lambda$ が f_λ 不変であることがわかる。すなわち次の補題が成立する。

補題 5.6. \bar{c} は、 F_0 不変である。

証明. \bar{c}, \bar{c}_n がコンパクトであることからこれらの F および F_{ε_n} による像もまたコンパクトであり、よって閉集合なのでこれらの間の Hausdorff 距離を測ることができる。三角不等式を用いると、

$$\begin{aligned} d(F_0(\bar{c}), \bar{c}) &\leq d(F_0(\bar{c}), F_0(\bar{c}_n)) + d(F_0(\bar{c}_n), \bar{c}) \\ &\leq d(F_0(\bar{c}), F_0(\bar{c}_n)) + d(F_0(\bar{c}_n), F_{\varepsilon_n}(\bar{c}_n)) + d(F_{\varepsilon_n}(\bar{c}_n), \bar{c}) \end{aligned}$$

が任意の n で成立する。 \bar{c}_n は F_{ε_n} 不変な c_n の閉包であるからこれも F_{ε_n} 不変であり、右辺第三項は $d(\bar{c}_n, \bar{c})$ である。 $n \rightarrow \infty$ のとき $\bar{c}_n \rightarrow \bar{c}$ であることより、第三項、および第一項は n を大きくすると任意に小さくできる。同様に $N \times [0, 1]$ 上で一様に $F_{\varepsilon_n} \rightarrow F_0$ であることより第二項も任意に小さくできる。よって $d(F_0(\bar{c}), \bar{c}) = 0$ 、従って $F_0(\bar{c}) = \bar{c}$ である。 \square

ここで \bar{c} がどのような形の集合であるかを考えてみる。

補題 5.7. $\pi_\Lambda(\bar{c}) = [0, 1]$ である。

証明. パラメータ空間への射影 π_Λ を、 $\pi_\Lambda : \mathcal{F}(N \times [0, 1]) \ni A \mapsto \pi_\Lambda(A) \in [0, 1]$ と見る。この写像は Hausdorff 距離で連続である。なぜなら、直積空間への距離の入れ方により任意の $A, B \in \mathcal{F}(N \times [0, 1])$ に対し $\rho(\pi_\Lambda(A), \pi_\Lambda(B)) \leq \rho(A, B)$ となるから。よって、

$$\pi_\Lambda(\bar{c}) = \pi_\Lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{c}_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\Lambda(\bar{c}_n)$$

となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\Lambda(\bar{c}_n) = [0, 1]$ を示せばよい。任意の n で $h(\pi_\Lambda(\bar{c}_n), [0, 1]) = 0$ は明らか。また、 n を大きくすると g_{ε_n} は一様に恒等写像に近くできる。よって $\varepsilon > 0$ に対し n を十分大きくすることで、 $0 < g_{\varepsilon_n}(\lambda) - \lambda < \varepsilon$ が任意の $\lambda \in [0, 1]$ で成立するようにはできる。このとき $\pi_\Lambda(\bar{c}_n)$ の ε 近傍は $[0, 1]$ である。よって、

$$\rho([0, 1], \pi_\Lambda(\bar{c}_n)) = h([0, 1], \pi_\Lambda(\bar{c}_n)) \leq \varepsilon$$

となるが、今 ε は任意だったので $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_\Lambda(\bar{c}_n) = [0, 1]$ である。 \square

補題 5.8. 任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対し、 $\bar{c}_\lambda := \bar{c} \cap N_\lambda$ は空でなく、コンパクトかつ F_0 不変である。

証明. 補題 5.7 により, $\bar{c}_\lambda \neq \emptyset$ が任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して成立する. また $\bar{c}_\lambda = N_\lambda \cap \bar{c}$ であるが, \bar{c} は補題 5.6 により F_0 不変であり, また F_0 の定義より N_λ も F_0 不変である. よって \bar{c}_λ は F_0 不変集合の交わりなので F_0 不変である. 同様に \bar{c} および N_λ がコンパクトであることから \bar{c}_λ はコンパクトである. \square

こんどは \bar{c}_λ の内部の構造を試みることにする.

$$I_\lambda := \{p \in \mathcal{P} \mid \bar{c}_\lambda \cap M_\lambda(p) \neq \emptyset\}$$

とおく. 実はこの I_λ が $(\mathcal{P}, <_\lambda)$ の全順序部分集合であることがわかる. これからそれを見ていこう.

補題 5.9. 点列 (x_n, λ_n) が $(x, \lambda) \in M_\lambda(p)$ に収束するとする. このとき, 数列 $k_n \geq 0$ があって $(y_n, \mu_n) := F_{\epsilon_n}^{k_n}(x_n, \lambda_n) \rightarrow (y, \lambda) \in M_\lambda(p')$ ならば, map defined order $<_\lambda$ で $p' \leq_\lambda p$ である. ただし $F_{\epsilon_n}^{k_n} := (F_{\epsilon_n})^{k_n}$ である.

証明. $p' \not\leq_\lambda p$ と仮定して矛盾を導く. $I := \{q \in \mathcal{P} \mid q \leq_\lambda p\}$ とおく. すると I は吸引的区間であり, $p' \notin I$ である. このとき $(M_\lambda(I), M_\lambda(\mathcal{P} \setminus I))$ が S_λ のアトラクター・リペラー分解を与えている. これから示すのは, 補題 5.8 のときと同様に任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M_\lambda(p)$ から $M_\lambda(p')$ への S_λ 内の ε 擬軌道が存在することである. これが言えれば命題 3.1 より矛盾である.

まず最初に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある K があって $n \geq K$ ならば軌道

$$\{(x_n, \lambda_n), F_{\epsilon_n}(x_n, \lambda_n), \dots, F_{\epsilon_n}^{k_n}(x_n, \lambda_n)\}$$

が全て S_λ の $\varepsilon/3$ 近傍に入るようにできることを言う. これを否定すると, ある $\varepsilon > 0$ があって, 任意の n に対しある $0 \leq l_n \leq k_n$ がとれ $d(F_{\epsilon_n}^{l_n}(x_n, \lambda_n), S_\lambda) \geq \varepsilon/3$ となる. $(z_n, \nu_n) := F_{\epsilon_n}^{l_n}(x_n, \lambda_n)$ とおくことにしよう. g_{ϵ_n} の単調性より $\mu_n \leq \nu_n \leq \lambda_n$ なので, $\mu_n \rightarrow \lambda$ および $\lambda_n \rightarrow \lambda$ から $\nu_n \rightarrow \lambda$ がわかる. また補題 5.1 を用いると $(z_n, \nu_n) \rightarrow \bar{c}$ がわかり, 結局 $(z_n, \nu_n) \rightarrow \bar{c}_\lambda$ となる. ところが, 補題 5.8 より \bar{c}_λ は f_λ のコンパクト不変集合なので S_λ に含まれ, 従って $(z_n, \nu_n) \rightarrow S_\lambda$ であるが, 任意の n に対し $d(F_{\epsilon_n}^{l_n}(x_n, \lambda_n), S_\lambda) \geq \varepsilon/3$ であることに矛盾する.

以上より存在の示された K を 1 つ取ることにしよう. さらに, 必要ならば K を大きく取り直して $n \geq K$ ならば任意の $(w, \xi) \in N \times [0, 1]$ に対し $d(F_0(w, \xi), F_{\epsilon_n}(w, \xi)) < \frac{\varepsilon}{3}$ となるようにする. ここで

$$d((x_n, \lambda_n), M_\lambda(p)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d((y_n, \mu_n), M_\lambda(p')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となるような $n \geq K$ を取ってくる. $F_{\epsilon_n}^{i_n}(x_n, \lambda_n)$ の $\varepsilon/3$ 近傍内の S_λ の点 s_i を選ぶと, 点列 $\{s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{k_n}\}$ が $M_\lambda(p)$ から $M_\lambda(p')$ への S_λ 内の ε 擬軌道となることが補題 5.9 と同様の不等式によって示される. \square

補題 5.10. 任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対し $(I_\lambda, >_\lambda)$ は全順序集合である.

証明. $\lambda = 0, 1$ の場合はそれぞれ 1 つの元からなるので自明. よって $\lambda \in (0, 1)$ と仮定する. $p, p' \in I_\lambda$ とする. $(x, \lambda) \in M_\lambda(p) \cap \bar{c}_\lambda$, $(y, \mu) \in M_\lambda(p') \cap \bar{c}_\lambda$ とおく. 補題 5.1 より, 点列 $(x_n, \lambda_n) \in \bar{c}_n$, $(y_n, \mu_n) \in \bar{c}_n$ があって $(x_n, \lambda_n) \rightarrow (x, \lambda)$, $(y_n, \mu_n) \rightarrow (y, \mu)$ である. c_n の集積点はすべて S_0 もしくは S_1 に入っていることと $\lambda \in (0, 1)$ であることから, 十分大きい N をとれば $n \geq N$ なら $(x_n, \lambda_n), (y_n, \mu_n) \in c_n$ とできる. c_n は一本の完全軌道なので, 任意の n に対し $k_n \geq 0$ があって $(x_n, \lambda_n) = F_{\epsilon_n}^{k_n}(y_n, \mu_n)$ または $F_{\epsilon_n}^{k_n}(x_n, \lambda_n) = (y_n, \mu_n)$ のどちらかが成立している. 部分列 n_i を適

当にとってどちらか一方が全ての n_i で成立するとしよう. ここで補題 5.9 を用いると, どちらの場合でも $p \geq_\lambda p'$ かまたは $p' \geq_\lambda p$ が成立する. よって $(I_\lambda, >_\lambda)$ は全順序集合である. \square

次に \bar{c}_λ の内部構造が λ とともにどのように変化していくのかを記述することを試みる. $p \in \mathcal{P}$ に対し

$$A_p := \{\lambda \in [0, 1] \mid \bar{c}_\lambda \subset M_\lambda(p)\}, \quad B_p := \{\lambda \in [0, 1] \mid \bar{c}_\lambda \cap M_\lambda(p) \neq \emptyset\}$$

とおく. 定義より $A_p \subset B_p$ である.

補題 5.11. 任意の $p \in \mathcal{P}$ に対し, A_p は $[0, 1]$ の開集合であり B_p はコンパクトである.

証明. 定義より

$$B_p = \pi_\Lambda \left(\bar{c} \cap \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} M_\lambda(p) \right)$$

であることがわかるが, $\bar{c} \cap \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} M_\lambda(p)$ は $F_0|_{N \times [0, 1]}$ に対する孤立不変集合なのでコンパクトであり, その連続写像による像なので B_p はコンパクトである. 次に

$$A_p = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{p' \neq p} B_{p'} \right)$$

となることを示そう. これが言えれば, $B_{p'}$ がコンパクト, 従って閉集合であることから A_p は $[0, 1]$ の開集合であることがわかる.

$\lambda \in A_p$ ならば, \bar{c}_λ は他の $M_\lambda(p')$ とは交わらないので $A_p \cap \bigcup_{p' \neq p} B_{p'} = \emptyset$ である. よって, $\lambda \in [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{p' \neq p} B_{p'} \right)$. 逆に $\lambda \in \Lambda \setminus \left(\bigcup_{p' \neq p} B_{p'} \right)$ とする. このとき $\bar{c}_\lambda \cap \bigcup_{p' \neq p} M_\lambda(p') = \emptyset$ となる. よって \bar{c}_λ が Morse 成分の間の connecting orbit とは交わらないことを言えば, Morse 分解の定義より $\bar{c}_\lambda \subset M_\lambda(p)$, すなわち $\lambda \in A_p$ がわかる. ところが, 補題 5.8 より \bar{c}_λ はコンパクト F_0 不変集合なので, \bar{c}_λ の点の f_λ による ω および α 極限集合もまた \bar{c}_λ に含まれることになる. 従って \bar{c}_λ が connecting orbit と交わると, その極限集合である 2 つの Morse 成分と \bar{c}_λ が交わることになり, $\bar{c}_\lambda \cap \bigcup_{p' \neq p} M_\lambda(p') = \emptyset$ に矛盾する. よって $\lambda \in A_p$. \square

次が \bar{c} の構造に関する最後の補題となる.

補題 5.12. $\lambda \in (0, 1)$ とする. $p = \inf I_\lambda$, $p' = \sup I_\lambda$ とおくと, ある $\varepsilon > 0$ があって $(\lambda - \varepsilon, \lambda) \subset A_p$ および $(\lambda, \lambda + \varepsilon) \subset A_{p'}$ が成り立つ.

証明. まず A_p に関する命題を否定すると, 単調増加列 $\lambda_m \rightarrow \lambda$ であって, 各 m に対しある $r_m \in \mathcal{P} \setminus p$ があり $\lambda_m \in B_{r_m}$ となるものがとれる. \mathcal{P} は有限集合なので適当に部分列を取ることにより $\lambda_m \in B_q$ としてよい. 補題 5.11 より B_q はコンパクトなので $\lambda \in B_q$ である. $(x, \lambda) \in M_\lambda(p) \cap \bar{c}_\lambda$, および各 m に対し $(y_m, \lambda_m) \in M_{\lambda_m}(p) \cap \bar{c}_{\lambda_m}$ を選ぼう. すると補題 5.1 より点列 (x_i, μ_i) , $(y_i^m, \nu_i^m) \in \bar{c}_i$ がとれて,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, \mu_i) = (x, \lambda), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i^m, \nu_i^m) = (y_m, \lambda_m)$$

が成立する. i の部分列 i_m を (1) $i_{m+1} > i_m$, (2) $d((y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m), M_\lambda(q)) < \frac{1}{m}$, (3) $\nu_{i_m}^m < \mu_{i_m}$, となるようにとる. $\lim_{i \rightarrow \infty} (y_i^m, \nu_i^m) \in M_{\lambda_m}(q)$ および $\lambda_m < \lambda$ よりこのような部分列は確かにとれる. こんどは m を動かしてみると,

$$(y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m) \in \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} M_\lambda(q)$$

であり、右辺はコンパクトなので収束部分列を持つ。番号を付け直して $(y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m) \rightarrow (y, \nu)$ とすると、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \lambda$ より $\nu = \lambda$ なので、結局 $(y, \nu) \in M_\lambda(q)$ がわかる。今 $\lambda \in (0, 1)$ なので $(x_{i_m}, \mu_{i_m}), (y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m) \subset c_{i_m}$ としてよい。 c_{i_m} は軌道なので $\nu_{i_m}^m < \mu_{i_m}$ に注意すると、ある $k_m \geq 0$ により $F_{\epsilon_{i_m}}^{k_m}(x_{i_m}, \mu_{i_m}) = (y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m)$ となる。このとき補題 5.9 により $q \leq_\lambda p$ となるが、今 $q \neq p$ なので $q <_\lambda p$ が得られた。補題 5.1 を用いると $(y, \nu) = \lim_{m \rightarrow \infty} (y_{i_m}^m, \nu_{i_m}^m) \in \bar{c}_\lambda$ がわかり、よって $q \in I_\lambda$ であるがこれは $p = \inf I_\lambda$ に反するので矛盾である。 $A_{p'}$ についても同様の議論をして、得られた ε の小さい方を取るにより補題は証明される。 \square

今まで準備してきた補題たちを用いると、次の定理を導くことができる。

定理 5.13. 任意の n で $C(M_1(q), M_0(p); \hat{S}_{\epsilon_n}) \neq \emptyset$ であるならば、ある $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0$ および $\{q = r_1, r_2, \dots, r_{k+1} = p\} \subset \mathcal{P}$ が存在し、各 λ_i での *map defined order* において $r_{i+1} <_i r_i$ が成立する。

証明. まず、

$$K := [0, 1] \setminus \bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p$$

とおくと補題 5.11 より K は閉集合であり、従ってコンパクトである。また、補題 5.12 により任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対してある ε がとれて $(\lambda - \varepsilon, \lambda) \cap K = \emptyset$ および $(\lambda, \lambda + \varepsilon) \cap K = \emptyset$ が成立し、よって K の $[0, 1]$ からの相対位相は離散位相である。従って離散なコンパクト集合であることから K は有限集合である。 $0 \in A_p, 1 \in A_q$ なので $K \subset (0, 1)$ となる。そこで K の元を大きい順に λ_i とする。また、 A_p たちが交わらない開集合であることより、 K によって分割された各開区間では、1つの A_p の中に含まれる。このことから、 $(\lambda_i, \lambda_{i-1}) \subset A_{r_i}$ となるように r_i を選んでおく（ただし、 $\lambda_0 = 1$ ）。補題 5.12 により $\sup I_{\lambda_i} = r_i, \inf I_{\lambda_i} = r_{i+1}$ となるので、 I_λ の定義より $r_{i+1} <_i r_i$ である。 $(\lambda_1, 1) \subset A_{r_1}$ であるが、 $1 \in A_q$ であり、 A_p たちが交わらない開集合であることから $A_q = A_{r_1}$ 、よって $q = r_1$ である。 $p = r_{k+1}$ も同様。 \square

5.2 Singular Transition Matrix Pair

ここでは摂動に関して不安定な connecting orbit の存在を代数的に見出す道具である transition matrix について議論する。基本となるのは定理 5.13 であり、connection を見つける部分を §4 で構成した connection matrix によって行なうことになる。

考える状況は 5.1 節と同じである。また ϵ は十分小さくとってあるとする。補題 5.5 により \hat{S}_ϵ の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll)$ が存在するが、添え字の区別をつけるため $M(p_1) := M_1(p), M(p_0) := M_0(p)$ において $\mathcal{P} \amalg \mathcal{P} = \{p_0 \in \mathcal{P} \mid p \in \mathcal{P}\} \amalg \{p_1 \in \mathcal{P} \mid p \in \mathcal{P}\}$ と思うことにする。

この Morse 分解に対し定理 4.18 により connection matrix pair $(\Delta_\epsilon, a_\epsilon) \in \mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll))$ が存在する。これらは写像として

$$\Delta_\epsilon, a_\epsilon : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_0)) \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_1)) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_0)) \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_1))$$

であるが、半順序 \ll の定義により $p_0 \ll q_1$ が任意の $p, q \in \mathcal{P}$ で成り立つので、 $\Delta_\epsilon, a_\epsilon$ が下三角行列であることを考えると

$$\Delta_\epsilon = \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ T_\epsilon & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad a_\epsilon = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ A_\epsilon & a_1 \end{pmatrix}$$

という形をしている。ここで本来なら Δ_i, a_i にも添字 ϵ を付けるべきであるが記号が繁雑になるので省略する。

定理 5.13 を使うために我々が欲しい connecting orbit は S_1 から S_0 への軌道なので,

$$T_\epsilon, A_\epsilon : \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_0)) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_1))$$

という成分に注目することになる。§4 および 5.1 での議論を思い出すと、次のように定義するのは自然であろう。

定義 5.14. (T, A) が *singular transition matrix pair* であるとは、ある $\epsilon_n \rightarrow 0$ がとれて、任意の n で $T = T_\epsilon$ かつ $A = A_\epsilon$ とできることをいう。singular transition matrix pair の集合を $\mathcal{T}_{0,1}$ と書く。

注意 5.15. コホモロジー Conley 指数の係数体を有限体にとり、さらに各 Morse 成分の Conley 指数が有限型になる場合には、可能な T_ϵ, A_ϵ は有限通りしかない。よって、この定義から直ちに $\mathcal{T}_{0,1} \neq \emptyset$ であることがわかる。このことから以下の例においては係数体 \mathbb{F} を適当な有限体とする。

今までに示した定理を総合すると次が導かれる。 $T = (T_{q_1 p_0})$ とおき、また $I \in \mathcal{I}(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll)$ に対しコチェイン写像 $a(I)$ が $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ 上に導く写像を $a^*(I)$ と書くことにする。

定理 5.16. $(T, A) \in \mathcal{T}_{0,1}$ とする。 $(p_0, q_1) \in \mathcal{I}_2(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll)$ のとき、 $T_{q_1 p_0} \neq 0$ もしくは $a^*(p_0) \oplus a^*(q_1) \cong a^*(p_0 \cup q_1)$ のどちらかが成立したならば、数列 $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0$ および $\{q = r_1, r_2, \dots, r_{k+1} = p\} \subset \mathcal{P}$ が存在し、各 λ_i での *map defined order* において $r_{i+1} <_i r_i$ が成立する。

証明. 定義よりある数列 $\epsilon_n \rightarrow 0$ があって、 $T = T_{\epsilon_n}$ かつ $A = A_{\epsilon_n}$ である。ひとつ n をとめて考える。いま、 \hat{S}_{ϵ_n} の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll)$ に対し (T, A) はその connection matrix の成分になっている。区間 $q_1 \cup p_0$ に対応する孤立不変集合を $M(q_1 p_0)$ と書く。 $M(q_1 p_0)$ のアトラクター・リペラー分解 $(M(p_0), M(q_1))$ に対し定理 4.1 により長完全列

$$\dots \xrightarrow{\delta^*} \text{Con}^k(M(q_1)) \longrightarrow \text{Con}^k(M(q_1 p_0)) \longrightarrow \text{Con}^k(M(p_0)) \xrightarrow{\delta^*} \dots$$

がある。このとき

$$\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_{q_1 p_0} & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} A_{p_0 p_0} & 0 \\ A_{q_1 p_0} & A_{q_1 q_1} \end{array} \right) \right)$$

がこのアトラクター・リペラー分解に対する connection matrix pair になっていて、定義 4.10 および定義 4.16 によると

$$\begin{aligned} \delta^* &\cong T_{q_1 p_0}, & \chi^*(M(q_1)) &\cong a^*(q_1), \\ \chi^*(M(p_0)) &\cong a^*(p_0), & \chi^*(M(q_1 \cup p_0)) &\cong a^*(q_1 \cup p_0). \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $T_{q_1 p_0} \neq 0$ ならば $\delta^* \neq 0$ が、 $a^*(p_0) \oplus a^*(q_1) \cong a^*(p_0 \cup q_1)$ ならば $\chi^*(M(q_1 p_0)) \cong \chi^*(M(q_1)) \oplus \chi^*(M(p_0))$ が結論される。系 4.3 により $C(M(q_1), M(p_0); \hat{S}_{\epsilon_n}) \neq \emptyset$ であり、これが任意の n で成立するので 定理 5.13 により示すべき結論が得られる。 \square

この定理により、transition matrix pair (T, A) がわかれば Morse 成分間の connecting orbit について知ることができるが、これだけでは transition matrix pair をどのようにして求めればよいかはわからない。そこで、

$$\Delta_\epsilon = \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ T_\epsilon & \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad a_\epsilon = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ A_\epsilon & a_1 \end{pmatrix}$$

という表現に立ち返ってみよう. ここで connection matrix pair を区間 I に制限すると $M(I)$ の Morse 分解の connection matrix pair が得られることから (Δ_0, a_0) と (Δ_1, a_1) がそれぞれ S_0, S_1 の Morse 分解の connection matrix pair になるのではないかと期待される. ところが, これらの定義されている空間は $X \times \Lambda$ における $M(p_0)$ や $M(p_1)$ のコホモロジー Conley 指数であり, $M_0(p)$ や $M_1(p)$ のコホモロジー Conley 指数ではないのでそのままでは同一視はできない. しかし次の命題が成立する.

命題 5.17. S_0 の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <_0)$ に対する connection matrix pair $(\tilde{\Delta}_0, \tilde{a}_0) \in \mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P}, <_0))$, および S_1 の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <_1)$ に対する connection matrix pair $(\tilde{\Delta}_1, \tilde{a}_1) \in \mathcal{CM}(\mathcal{M}(\mathcal{P}, <_1))$ がとれて, (Δ_0, a_0) は $(\tilde{\Delta}_0, \tilde{a}_0)$ と次数 0 の自己準同型付き次数加群組み紐同型 θ_0 により, (Δ_1, a_1) は $(\tilde{\Delta}_1, \tilde{a}_1)$ と次数 -1 の自己準同型付き次数加群組み紐同型 θ_1 により, それぞれ共役である. すなわち次の図が可換である.

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_i), F_\epsilon) & \xrightarrow{\Delta_i \text{ (or } a_i)} & \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M(p_i), F_\epsilon) \\ \theta_i \downarrow & & \theta_i \downarrow \\ \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M_i(p), f_i) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_i \text{ (or } \tilde{a}_i)} & \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} CH^*(M_i(p), f_i). \end{array}$$

この定理の証明のために補題を準備する.

補題 5.18. $\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}$ を自己準同型付き次数加群組み紐, $\Psi = \{\phi^* : H(I) \rightarrow H'(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ を自己準同型付き次数加群組み紐の同型とする. このとき (Δ, A) が \mathcal{H} の connection matrix pair ならば,

$$\tilde{\Delta}_{pq} := \phi^*(p) \circ \Delta_{pq} \circ \phi^*(q)^{-1}, \quad \tilde{a}_{pq} := \phi^*(p) \circ a_{pq} \circ \phi^*(q)^{-1}$$

とおくと $(\tilde{\Delta}, \tilde{a})$ は $\tilde{\mathcal{H}}$ の connection matrix pair である.

証明. 仮定より $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}\Delta \cong \tilde{\mathcal{H}}$ である. 示すべきことは, $\tilde{\mathcal{H}} \cong \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Delta}$ なので, $\mathcal{H}\Delta \cong \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Delta}$ を言えばよい. 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対し, $(\tilde{\Delta}, \tilde{a})$ の定義から

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p \in I} H(p) & \xrightarrow{\Delta(I) \text{ (or } a(I))} & \bigoplus_{p \in I} H(p) \\ \oplus \phi^*(p) \downarrow & & \oplus \phi^*(p) \downarrow \\ \bigoplus_{p \in I} \tilde{H}(p) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}(I) \text{ (or } \tilde{a}(I))} & \bigoplus_{p \in I} \tilde{H}(p) \end{array}$$

が可換になる. このことから, 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ に対し $\mathcal{C}\Delta$ から $\mathcal{C}'\tilde{\Delta}$ へ,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in J} H(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in IJ} H(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in I} H(p) \longrightarrow 0 \\ & & \oplus \phi^*(p) \downarrow & & \oplus \phi^*(p) \downarrow & & \oplus \phi^*(p) \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in J} \tilde{H}(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in IJ} \tilde{H}(p) & \longrightarrow & \bigoplus_{p \in I} \tilde{H}(p) \longrightarrow 0 \end{array}$$

という $\text{End}(\delta\mathcal{V})$ での可換図式がある (ただし簡単のため, $((\bigoplus_{p \in I} H(p), \Delta(I)), a(I))$ 等を単に $\bigoplus_{p \in I} H(p)$ 等で表している). よって $\mathcal{H}\Delta$ から $\tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Delta}$ への $\oplus \phi^*$ より導かれる準同型がある. これを $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\phi}^*(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ とする. コチェインでの同型に対しホモロジーを取っているので, 関手性より $\tilde{\Psi}$ は同型となる. \square

定理 5.17 の証明. まず, $i = 0$ について示そう. S_0 の Morse 分解 $\mathcal{M}(\mathcal{P}, \langle_0)$ の安定な filtration $\mathcal{N}(\mathcal{P}, \langle_0) = \{N(I) \mid I \in \mathcal{A}\}$ をとろう. これから作られる自己準同型付き次数加群組紐 $\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{M}}_0)$ と書くことにする. このとき, コンパクト集合の族

$$\{\hat{N}(I) := N(I) \times [-\varepsilon, \varepsilon] \mid I \in \mathcal{A}\}$$

が S_0 の $F_\varepsilon : X \times \Lambda \rightarrow X \times \Lambda$ における filtration になっている. なぜなら filtration の定義 3.4 における (2), (3) を満たすことは自明. あとは $(\hat{N}(I), \hat{N}(\emptyset))$ が $M_0(I)$ の filtration pair になることを見ればよいが, これは安定な filtration を取ったことから十分小さい ε を取れば成り立つ. この $\{\hat{N}(I) \mid I \in \mathcal{A}\}$ から作られる自己準同型付き次数加群組紐を $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0)$ と書く. 補題 5.18 により, $\mathcal{H}(\mathcal{M}_0)$ から $\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{M}}_0)$ への自己準同型付き次数加群組紐の同型 $\{\theta_0^*(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ が取れることを言えば題意は示される. 任意の $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ をとろう.

$$Q_I := \{p \in \mathcal{P} \setminus I \mid \exists q \in I, p < q\}$$

とおくと, すべて包含写像よりなる図式

$$\begin{array}{ccccc} (N(Q_I I), N(Q_I)) & \longrightarrow & (N(Q_{IJ} IJ), N(Q_{IJ})) & \longrightarrow & (N(Q_{IJ} IJ), N(Q_{IJ} I)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\hat{N}(Q_I I), \hat{N}(Q_I)) & \longrightarrow & (\hat{N}(Q_{IJ} IJ), \hat{N}(Q_{IJ})) & \longrightarrow & (\hat{N}(Q_{IJ} IJ), \hat{N}(Q_{IJ} I)) \end{array}$$

が可換である. ここで縦方向の包含写像はホモトピー同値写像なので, この図式コホモロジーを取ると, 求める同型写像 $\{\theta_0^*(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ が包含写像より導かれる.

次に $i = 1$ の場合を考える. $i = 0$ の場合と同様, $\mathcal{N}(\mathcal{P}, \langle_1, S_1, f_1) = \{N(I) \mid I \in \mathcal{A}\}$ を $\mathcal{M}(\mathcal{P}, \langle_1, S_1, f_1)$ の安定な filtration とし, そこから導かれる自己準同型付き次数加群組紐を $\mathcal{H}(\mathcal{M}_1)$ とする. このとき,

$$\hat{N}(I) := (N(I) \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]) \cup (N(\mathcal{P}) \times ([1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon'] \cup [1 + \varepsilon', 1 + \varepsilon]))$$

とおくと, 適当な $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ に対し $\{\hat{N}(I) \mid I \in \mathcal{A}\}$ が $\mathcal{M}(\mathcal{P}, \ll, S_0, F_\varepsilon)$ の filtration となることが示せる. $\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_1)$ で $\{\hat{N}(I) \mid I \in \mathcal{A}\}$ から導かれる自己準同型付き次数加群組紐を表わす. 今 $I \in \mathcal{I}$ に対し $(K, L) := (N(Q_I I), N(Q_I))$, $(\hat{K}, \hat{L}) := (\hat{N}(Q_I I), \hat{N}(Q_I))$ とおき,

$$\begin{aligned} K_- &:= \{K \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon']\} \cup \{N(\mathcal{P}) \times ([1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon']\}, \\ K_+ &:= \{K \times (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon]\} \cup \{N(\mathcal{P}) \times ([1 + \varepsilon', 1 + \varepsilon]\}, \\ L_- &:= \{L \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon']\} \cup \{N(\mathcal{P}) \times ([1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon']\}, \\ L_+ &:= \{L \times (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon]\} \cup \{N(\mathcal{P}) \times ([1 + \varepsilon', 1 + \varepsilon]\} \end{aligned}$$

と定義する. 簡単のため,

$$\begin{aligned} K' &:= K \cup f_1(L), & L' &:= L \cup f_1(L), \\ \hat{K}' &:= \hat{K} \cup F_\varepsilon(\hat{L}), & \hat{L}' &:= \hat{L} \cup F_\varepsilon(\hat{L}), \\ K'_\pm &:= K_\pm \cup F_\varepsilon(K_\pm), & L'_\pm &:= L_\pm \cup F_\varepsilon(L_\pm) \end{aligned}$$

と書くことにする. K'_\pm の定義は K' や \hat{K}' と異なることに注意. ここで Meyer-Vietoris sequence の

変種を用いる。まず次の可換図式に注目する。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^\sharp(\hat{K}, \hat{L}) & \longrightarrow & C^\sharp(K_-, L_-) \oplus C^\sharp(K_+, L_+) & \longrightarrow & C^\sharp(K_+ \cap K_-, L_+ \cap L_-) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow F_\epsilon^\sharp & & \uparrow F_\epsilon^\sharp \oplus F_\epsilon^\sharp & & \uparrow F_\epsilon^\sharp \\
0 & \longrightarrow & C^\sharp(\hat{K}', \hat{L}') & \longrightarrow & C^\sharp(K'_-, L'_-) \oplus C^\sharp(K'_+, L'_+) & \longrightarrow & C^\sharp(K'_+ \cap K'_-, L'_+ \cap L'_-) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow j^\sharp & & \downarrow i^\sharp \oplus i^\sharp & & \downarrow i^\sharp \\
0 & \longrightarrow & C^\sharp(\hat{K}, \hat{L}) & \longrightarrow & C^\sharp(K_-, L_-) \oplus C^\sharp(K_+, L_+) & \longrightarrow & C^\sharp(K_+ \cap K_-, L_+ \cap L_-) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

ここで i および j は包含写像である。 K_\pm の中で K_\pm をホモトピーで L_\pm に変形できることより、 $H^*(K_\pm, L_\pm) = 0$ がわかる。さらに $\text{Aut}(\mathcal{GV})$ の対象として $(H^*(K'_+ \cap K'_-, L'_+ \cap L'_-, F_\epsilon^* \circ (i^*)^{-1}) \cong (H^*(K, L), f_1^* \circ (i^*)^{-1}))$ となることもわかり、これらから次の長完全列が可換であることが示せる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^k(K, L) & \xrightarrow{\delta^k} & H^{k+1}(\hat{K}, \hat{L}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\
& & & & f_1^* \circ (i^*)^{-1} \downarrow & & F_\epsilon^* \circ (j^*)^{-1} \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^k(K, L) & \xrightarrow{\delta^k} & H^{k+1}(\hat{K}, \hat{L}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

よって \varinjlim が H^* と交換することから、 $\theta(I) : CH^*(M_1(I), F_\epsilon) \rightarrow CH^*(M_1(I), f_1)$ という同型写像が得られた。あとはこうして構成した $\{\theta(I) \mid I \in \mathcal{I}\}$ が自己準同型付き次数加群組み紐としての同型射であることを言えばよい。 $(I, J) \in \mathcal{I}_2$ をとると、

$$\begin{aligned}
(N(Q_I I), N(Q_I)) &\xrightarrow{\iota} (N(Q_{IJ} I J), N(Q_{IJ})) \xrightarrow{\rho} (N(Q_{IJ} I J), N(Q_{IJ} I)), \\
(\hat{N}(Q_I I), \hat{N}(Q_I)) &\xrightarrow{\hat{\iota}} (\hat{N}(Q_{IJ} I J), \hat{N}(Q_{IJ})) \xrightarrow{\hat{\rho}} (\hat{N}(Q_{IJ} I J), \hat{N}(Q_{IJ} I))
\end{aligned}$$

という包含写像たちがあるが、ここで $\theta(I) \circ \iota^* = \hat{\iota}^* \circ \theta(IJ)$, $\theta(IJ) \circ \rho^* = \hat{\rho}^* \circ \theta(I)$ となることが示せる。よって、

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{k-1}} & \text{Con}^k(M(J)) & \longrightarrow & \text{Con}^k(M(IJ)) & \longrightarrow & \text{Con}^k(M(I)) \xrightarrow{\delta^k} \cdots \\
& & \theta^k(J) \downarrow & & \theta^k(IJ) \downarrow & & \theta^k(I) \downarrow \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{k-1}} & \text{Con}^k(\hat{M}(J)) & \longrightarrow & \text{Con}^k(\hat{M}(IJ)) & \longrightarrow & \text{Con}^k(\hat{M}(I)) \xrightarrow{\delta^k} \cdots
\end{array}$$

となり、自己準同型付き次数加群組み紐としての同型であることが示された。最後に $\theta_1(I) := \theta(I)^{-1}$ とおくと、これが定理の主張する写像となる。 \square

注意 5.19. Δ_i と $\tilde{\Delta}_i$ が共役であるということはベクトル空間の基底を取りかえていると考えられるので、各 Morse 成分のコホモロジー Conley 指数が 1 次元ならば、適当に基底を取ることで行列として Δ_i と $\tilde{\Delta}_i$ が本当に等しいと思える。

具体的な計算において役に立つ補題をいくつか挙げよう。

補題 5.20. $(T, A) \in \mathcal{T}_{0,1}$ とすると、 $Ta_0 + \Delta_1 A = A\Delta_0 + a_1 T$.

証明. connection matrix pair の定義より

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ T & \Delta_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ A & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ A & a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 \\ T & \Delta_1 \end{pmatrix}$$

なので、この左下成分をくらべることにより示される。 \square

補題 5.21. (A, R) が孤立不変集合 S のアトラクター・リペラー分解であるとする. このとき, $\text{Con}^*(S) = 0$ ならば 定理 4.1 における $\delta: \text{Con}^*(A) \rightarrow \text{Con}^*(R)$ は同型である.

証明. 定理 4.1 において $\text{Con}^*(S) = 0$ を代入すれば完全性より成り立つ. □

補題 5.22. ある孤立近傍 $K \subset N$ によって, $\text{Inv}(K, f_\lambda) = M_\lambda(p)$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ で成立し, しかも任意の λ において $K \cap f_\lambda(N \setminus K) = \emptyset$ であるならば, T の (p_1, p_0) 成分は同型である.

証明. 補題 5.3 により $K \times \bar{\Lambda}$ は孤立近傍であるとしてよい. $G_t(x, \lambda) := (f_{t\lambda}, g_\epsilon(\lambda))$ という $G_0 = f_0 \times g_\epsilon$ から $G_1 = F_\epsilon$ へのホモトピーを考える. この変形過程で $K \times \bar{\Lambda}$ が孤立近傍であり続けるので, 命題 2.13 より $\text{Con}^*(\text{Inv}(K \times \bar{\Lambda}, F_\epsilon)) = \text{Con}^*(\text{Inv}(K \times \bar{\Lambda}, f_0 \times g_\epsilon))$ となる. 定数 $\gamma > 0$ に対し, $g'(\lambda) = \lambda - \gamma$ とおき, g_ϵ から g' へのホモトピーを考える. 再び命題 2.13 により $\text{Con}^*(\text{Inv}(K \times \bar{\Lambda}, f_0 \times g_\epsilon)) = \text{Con}^*(\text{Inv}(K \times \bar{\Lambda}, f_0 \times g'))$ がわかる. $\text{Inv}(K \times \bar{\Lambda}, f_0 \times g') = \emptyset$ なので, $\text{Con}^*(\text{Inv}(K, f_0 \times g')) = 0$ となり, 結局 $\text{Con}^*(\text{Inv}(K, F_\epsilon)) = 0$ が結論される. 次に

$$\text{Inv}(K, F_\epsilon) = M(p_0 \cup p_1) = M(p_0) \cup M(p_1) \cup C(M(p_1), M(p_0); \hat{S}_\epsilon).$$

となることを見よう. F_ϵ の定義より $\text{Inv}(K, F_\epsilon) \subset M(p_0 \cup p_1)$ が従う. この補題の過程より $K \times [0, 1]$ の外の点は $K \times [0, 1]$ に入らないので, $C(M(p_1), M(p_0); \hat{S}_{\epsilon_n}) \subset \text{Inv}(K, F_\epsilon)$ となり, よって $M(p_0 \cup p_1) \subset \text{Inv}(K, F_\epsilon)$ がわかる. 最後に補題 5.21 を使うと, $\delta^* \cong T_{p_1 p_0}$ が同型であることが示される. □

これらの命題により実際に transition matrix pair の成分が計算でき, ある $\lambda \in (0, 1)$ において, $M_\lambda(p)$ から $M_\lambda(q)$ への connecting orbit が存在することが示せる 1 パラメータ族の例をあげよう.

例 5.23. 図 6, 7 で示される写像の 1 パラメータ族 $\{f_\lambda\}$ を考える. 図の正方形を右から N_p, N_q, N_r とする.

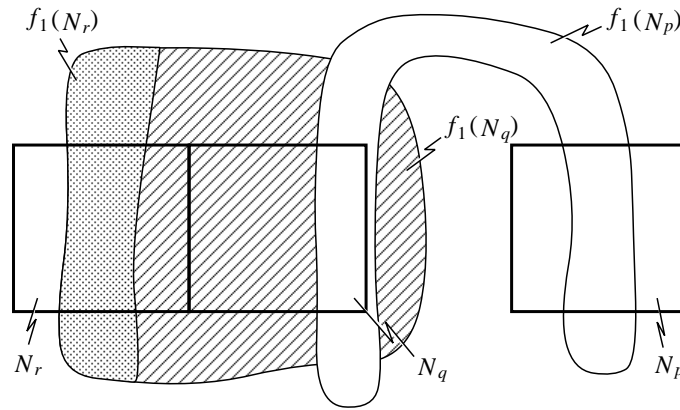


図 6: f_1

f_λ は可逆ではないことに注意. $i = 0, 1$ に対し, $\{\text{Inv}(N_p, f_i), \text{Inv}(N_q, f_i), \text{Inv}(N_r, f_i)\}$ が $\text{Inv}(N_p \cup N_q \cup N_r, f_i)$ の Morse 分解となることが図よりわかる. 実際, $i = 1$ に対しては $<_1$ という $r <_1 p$ のみからなる半順序, $i = 0$ に対しては $<_0$ という $r <_0 p, r <_0 q$ のふたつの関係からなる半順序を取ることが出来る.

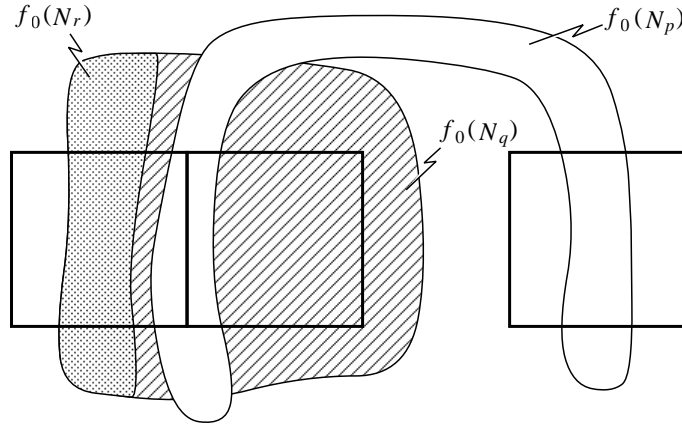


図 7: f_0

ここで, $\{\text{Inv}(N_p, f_\lambda), \text{Inv}(N_q, f_\lambda), \text{Inv}(N_r, f_\lambda)\}$ という Morse 分解が Λ 上連続すると仮定する. このときに主張は, ある $\lambda \in (0, 1)$ があって, $\text{Inv}(N_p, f_\lambda)$ から $\text{Inv}(N_q, f_\lambda)$ への connecting orbit があるというものである. これを示すために transition matrix pair を計算しよう. 以後 $\eta = p, q, r$ に対し $M_\lambda(\eta) := \text{Inv}(N_\eta, f_\lambda)$ と書く.

まず filtration を見つける. $\lambda = 1$ においては図 8 のようにとれる.

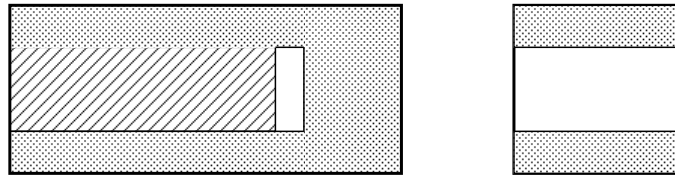


図 8: filtration for f_1

$$\begin{aligned} N(p \cup q \cup r) &= N_p \cup N_q \cup N_r, \\ N(p \cup r) &= N(p) \cup N(r), \\ N(q \cup r) &= N_q \cup N_r \cup N(r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(p) &= N_p \cup N(\emptyset), \\ N(r) &= \text{斜線部} \cup N(\emptyset), \\ N(\emptyset) &= \text{打点部}. \end{aligned}$$

また, $\lambda = 0$ においては図 9 のようにとれる.

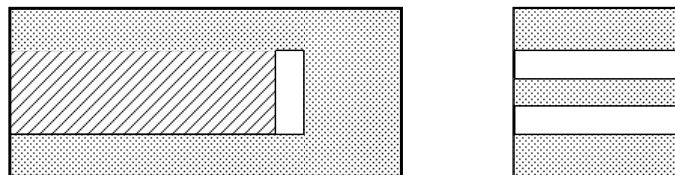


図 9: filtration for f_0

$$\begin{aligned}
N(p \cup q \cup r) &= N_p \cup N_q \cup N_r, & N(r) &= \text{斜線部} \cup N(\emptyset), \\
N(p \cup r) &= N_p \cup N(r), & N(\emptyset) &= \text{打点部}, \\
N(q \cup r) &= N_q \cup N_r \cup N(r)
\end{aligned}$$

$i = 0, 1$ の双方において, filtration より

$$\begin{aligned}
\text{Con}^k(M_i(p)) \cong \text{Con}^k(M_i(r)) &\cong \begin{cases} (\mathbb{F}, 1), & k = 1 \\ (0, 0), & k \neq 1 \end{cases}, \\
\text{Con}^k(M_i(q)) &\cong \begin{cases} (\mathbb{F}, 1), & k = 2 \\ (0, 0), & k \neq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

と計算できる. $\lambda = 0, 1$ における connection matrix pair を (Δ_0, a_0) , (Δ_1, a_1) とする. このとき,

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. なぜなら, Δ_i が真に下三角で次数が $+1$ であることから $\delta_{rq} : CH^*(M_i(r)) \rightarrow CH^*(M_i(q))$ 以外の成分は 0 となる. また filtration から $\text{Con}^*(M_i(q \cup r)) = 0$ がわかり補題 5.21 より δ_{rq} は同型である. 次に

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. $(\delta_{pp}, a_{pp}) = (0, a_{pp})$ が $M(p)$ のコホモロジー Conley 指数を導くが, 今はコバウンダリ写像が 0 なので a_{pp} がそのまま $a^*(p) \cong \chi^*(M(p)) = 1$ となることより対角線は 1 である. 対角線のすぐ下が 0なのは次数よりわかる. 左下の成分については, filtration より計算している.

さて, この 1 パラメータ族の transition matrix を (T, A) としよう. 懸垂によって次数が 1 つ上がることに注意しながら, 次数の考察により 0 となる場所は省くと,

$$T = \begin{pmatrix} t_{r_1 r_0} & 0 & t_{r_1 p_0} \\ 0 & t_{q_1 q_0} & 0 \\ t_{p_1 r_0} & 0 & t_{p_1 p_0} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{r_1 q_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{p_1 q_0} & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる. ここで補題 5.20 を用いると, 左下成分を見ることにより $t_{p_1 r_0} + t_{p_1 p_0} = a_{p_1 q_0} + t_{p_1 r_0}$ となり, よって $a_{p_1 q_0} = t_{p_1 p_0}$. 補題 5.22 より $a_{p_1 q_0} \neq 0$ がわかる. 今 \prec_1 においては $q \not\prec_1 p$ なので, $(q_0, p_1) \in \mathcal{I}_2$ となる. connection matrix pair 全体を区間 $(q_0 \cup p_1)$ に制限すると,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{p_1 q_0} & 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる. このとき, コバウンダリ写像が 0 なので

$$a^*(p_1 \cup q_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^*(p_1) \oplus a^*(q_0)$$

となり, 定理 5.16 よりある $\lambda \in (0, 1)$ があって f_λ は $M_\lambda(p)$ より $M_\lambda(q)$ への connecting orbit を持つことがわかる.

例 5.24. ここでは先の例 5.23 の 3次元写像版 $\{g_\lambda\}$ を考える. 図 10 の 3つの立方体を右から N_p, N_q, N_r とする.

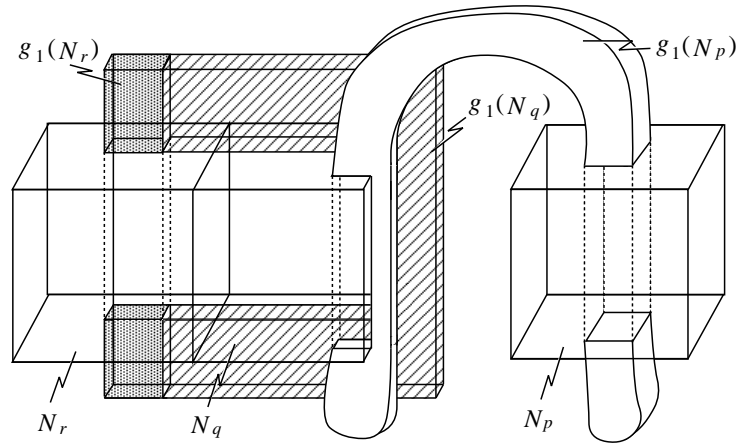


図 10: g_1

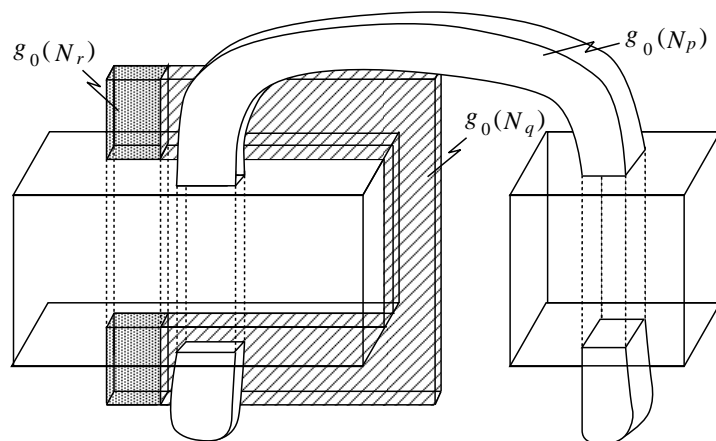


図 11: g_0

Morse 分解等の条件は例 5.23 と同様. 簡単な考察により, 例 5.23 での filtration に閉区間を直積したものがこの場合の filtration になり, コホモロジー群に導かれる写像も等しいことがわかる. すなわち, 例 5.23 と例 5.24 は Conley 指数で見れば代数的に同じものとして扱えるということである. よって $\lambda = 0, 1$ での connection matrix も例 5.23 と同じものがとれ, 例 5.23 と同じくある $\lambda \in (0, 1)$ があって f_λ は $M_\lambda(p)$ より $M_\lambda(q)$ への connecting orbit を持つことがわかる.

6 Tangency と Conley 指数

この節では, 双曲型不動点の安定多様体と不安定多様体の接触 (tangency) の問題を議論する. 双曲型不動点 p の安定多様体を $W^s(p)$, 不安定多様体を $W^u(p)$ と書く. $W^s(p)$ と $W^u(q)$ が接触し

ているとき, $p \neq q$ ならば heteroclinic 接触, $p = q$ ならば homoclinic 接触という. これらの接触は, 可微分同相写像の摂動において自然に現われる分岐である. さらに Pujals-Sambarino [18] の結果によれば, M が 2 次元コンパクト多様体の場合には, 任意の $f \in \text{Diff}^1(M)$ は公理 A をみたす写像か, homoclinic 接触を持つ写像で C^1 -近似できる. よって homoclinic 接触を持つ写像の理解が $\text{Diff}^1(M)$ 全体の理解につながることになる.

このように双曲型不動点の安定多様体と不安定多様体の接触は重要な分岐でありよく研究されているので, 可微分同相写像の 1 パラメータ族において接触が起きていることがわかれば, その 1 パラメータ族の分岐を調べる上で多くの情報が得られると考えられる.

M を m 次元 C^r 級多様体, f を M 上の C^s 級可微分同相写像とする. $f : M \rightarrow M$ の射影化 $Pf : PM \rightarrow PM$ を定義しよう. まず PM を

$$PM = \coprod_{x \in M} P_x = \coprod_{x \in M} \{V \subset T_x M \mid \dim_{\mathbb{R}}(V) = 1\}$$

と定義する. PM 上に df から導かれる写像を $Pf : PM \rightarrow PM$ とする. すなわち, $Pf([v]) = [df(v)]$ である. $p : TM \setminus M \rightarrow PM$, $p' : PM \rightarrow M$ を射影とし, M を零切断の像と同一視すると,

$$\begin{array}{ccc} TM \setminus M & \xrightarrow{df|_{TM \setminus M}} & TM \setminus M \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ PM & \xrightarrow{Pf} & PM \\ p' \downarrow & & p' \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

が可換になっている. このとき次が簡単な考察により示される.

命題 6.1. PM は C^{r-1} 級ファイバー束, Pf は C^{s-1} 級微分同相写像である.

これにより PM が局所コンパクト距離空間, Pf がその上の連続写像となり Conley 指数の議論を用いることができる (PM が距離化可能であることは, $r \geq 2$ ならば PM 上にリーマン距離が存在するので明らか. $r = 1$ の場合は, 局所コンパクトかつ Hausdorff で第 2 可算公理を満たす空間は距離化可能であることを用いる).

$x \in M$ を f の双曲型不動点とし, $T_x M = \tilde{E}_x^s \oplus \tilde{E}_x^u$ を対応する接空間の分解とする. このとき $E_x^s := p(\tilde{E}_x^s \setminus \{0\})$, $E_x^u := p(\tilde{E}_x^u \setminus \{0\})$ とおこう. このとき次が成り立つ.

命題 6.2. E_x^s, E_x^u は Pf の孤立不変集合である.

証明. $L \subset M$ を $\{x\}$ の $f : M \rightarrow M$ に関する孤立近傍で $PU \cong U \times \mathbb{R}P^{m-1}$ となるものとしよう. E_x^s と E_x^u は交わらない PM のコンパクト集合なので, U と U' というそれぞれ E_x^s と E_x^u のコンパクト近傍で, 互いに交わらず $p'(U), p'(U') \subset L$ となるものがとれる. このとき $\text{Inv}(U, Pf) = E_x^s$ および $\text{Inv}(U', Pf) = E_x^u$ となることを示そう. $z = (y, p(v)) \in U$ を適当に選ぶ. ここで $0 \neq v \in T_y M$ である. もし $y \neq x$ ならば, $z \notin \text{Inv}(U, Pf)$ となるのは明らか. そこで $y = x$ とし, $v = (v^s, v^u)$, ただし $v^s \in \tilde{E}_x^s$ かつ $v^u \in \tilde{E}_x^u$ とおこう. すると,

$$Pf^n(z) = (f^n(x), p(df^n(v))) = (x, p(df^n(v^s) + df^n(v^u))).$$

となる. もし $z \notin E_x^s$ ならば $v^u \neq 0$ なので, $p(df^n(v))$ は $n \rightarrow \infty$ で E_x^u に任意に近づく. 従って $Pf^n(z)$ はある正の n で U から出ていく. このことから U は孤立近傍であり $\text{Inv}(U, Pf) = E_x^s$ となる. E_x^u についても同様. \square

接触の発生と transition matrix pair を結びつけるのが次の命題である.

命題 6.3. p, q を f の双曲型不動点とし, $\dim W^u(p) + \dim W^s(q) \leq n$ とする. このとき, あるコンパクト集合 $S \subset PM$ があって $C(E_p^u, E_q^s; S) \neq \emptyset$ ならば, $W^u(p)$ と $W^s(q)$ は横断的ではない.

証明. 任意の $z \in C(E_p^u, E_q^s; S)$ をとる. $z \in P_x M$ とする. このとき, $(Pf)^n(z) \in P_{f^n(x)} M$ なので, PM の位相の入れ方より $\omega(x) = q, \alpha(x) = p$ となるが, 今 x の軌道がコンパクト集合 S に含まれているので $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = q, \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = p$ となり, $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ である. よって $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ なので, $\dim W^u(p) + \dim W^s(q) < n$ の時は $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が横断的でないことは明らか. $\dim W^u(p) + \dim W^s(q) = n$ の場合に $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が横断的であると仮定して矛盾を導こう. まず $(Pf)^n(z)$ は各 n に対し, $f^n(x)$ での $W^u(p)$ の接ベクトルにより表わされることがわかる. なぜなら, そうでないとすると $(Pf)^n(z)$ は $W^u(p)$ と横断的なベクトルにより代表され, λ -補題より $\lim_{n \rightarrow -\infty} (Pf)^n(z) = E_p^s$ である. ところが, PM において E_p^u と E_p^s は交わらない閉集合なので, $\alpha(z) \subset E_p^u$ に矛盾する. よって z は $W^u(p)$ の接ベクトルの方向により代表されるが, 仮定よりこのベクトルは $W^s(q)$ に対し横断的である. 再び λ -補題を用いると, $\lim_{n \rightarrow \infty} (Pf)^n(z) = E_q^u$ となり, これは $\omega(z) \subset E_q^s$ に矛盾する. \square

$\dim W^u(p) + \dim W^s(q) = n$ の時には次の命題が命題 6.3 の逆を与える.

命題 6.4. $\dim W^u(p) + \dim W^s(q) \geq n$ かつ $W^u(p)$ と $W^s(q)$ が横断的でないなら $C(E_p^u, E_q^s; PM) \neq \emptyset$.

証明. 仮定より, ある $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$ があって $T_x(W^u(p)) \oplus T_x(W^s(q)) \neq T_x M$ である. もし $T_x(W^u(p)) \cap T_x(W^s(q)) \neq \emptyset$ であるとすると, $\dim W^u(p) + \dim W^s(q) \geq n$ より $\dim(T_x(W^u(p)) \oplus T_x(W^s(q))) = n$ となり矛盾. よって $v \in T_x(W^u(p)) \cap T_x(W^s(q))$ をとり, $z = [v] \in P_x M$ とおくと, $\lim_{n \rightarrow \infty} Pf^n(z) = E_q^s, \lim_{n \rightarrow -\infty} Pf^n(z) = E_p^u$ となり $C(E_p^u, E_q^s; PM) \neq \emptyset$ である. \square

これらの命題により, M での安定多様体と不安定多様体の接触の問題が PM における connecting orbit の存在問題と関係づけられ, §5 における議論を用いることができる.

今, 可微分同相写像の 1 パラメータ族 f_λ が与えられているとしよう. このとき, PM 上に同相写像の 1 パラメータ族 $Pf_\lambda := P(f_\lambda)$ が導かれる. この PM 上の 1 パラメータ族において, Λ 上連続する孤立不変集合 $S_\lambda \in PM$ の Morse 分解 $\{M_\lambda(p) \mid p \in (\mathcal{P}, <_\lambda)\}$ があり, その Morse 成分のうちの 2 つが双曲型不動点 $p(\lambda), q(\lambda)$ により $M_\lambda(p) = E_{p(\lambda)}^u, M_\lambda(q) = E_{q(\lambda)}^s$ と表わされているとする. ここで, Morse 成分の名前 $p, q \in \mathcal{P}$ を, そのまま双曲型不動点の名前として流用していることに注意.

定理 6.5. $(T, A) \in \mathcal{T}_{0,1}$ とする. $(p_0, q_1) \in \mathcal{I}_2(\mathcal{P} \amalg \mathcal{P}, \ll)$ かつ任意の $\lambda \in [0, 1]$ で $(q, p) \in \mathcal{I}_2(\mathcal{P}, <_\lambda)$ とする. このとき $T_{q_1 p_0} \neq 0$ か $a^*(p_0) \oplus a^*(q_1) \cong a^*(p_0 \cup q_1)$ のどちらかが成立したならば, ある $\lambda \in (0, 1)$ があって, $W^u(p(\lambda))$ と $W^s(q(\lambda))$ は横断的でない.

証明. 定理 5.16 を用いると, ある λ があって $C(E_{p(\lambda)}^u, E_{q(\lambda)}^s; S_\lambda) \neq \emptyset$ となり, 命題 6.3 により結論が導かれる. \square

これから, 実際にこの節の議論によって homoclinic 及び heteroclinic 接触が見つけれられる例を挙げよう. どちらも M が 2 次元のときの例である. この場合 $P_x M$ は円周 S^1 と同相であり, PM は 3 次元多様体である.

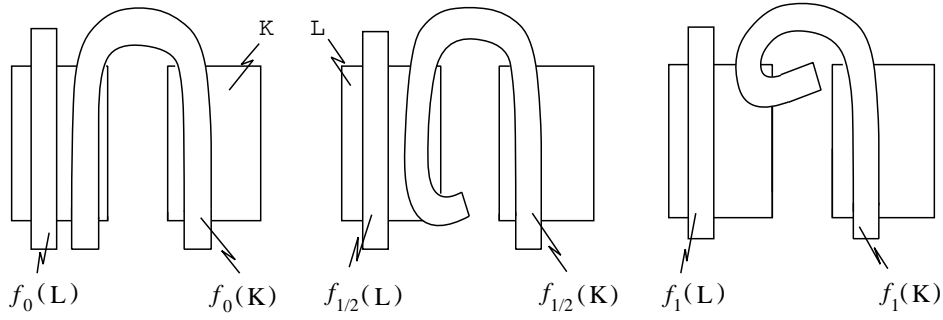


図 12: f_λ

例 6.6 (heteroclinic 接触). 図 12 で示される可微分同相写像の族 $\{f_\lambda\}$ を考える.

f_0 は例 4.4 の broken horseshoe である. 任意の $\lambda \in \Lambda$ で $p = p(\lambda) := \text{Inv}(K, f_\lambda)$ および $q = q(\lambda) := \text{Inv}(L, f_\lambda)$ が双曲型の鞍点であるとしよう. すると, 図 13 に従い $\text{Inv}(N_p^u, Pf_\lambda) = E_p^u$, $\text{Inv}(N_q^s, Pf_\lambda) = E_q^s$, $\text{Inv}(N_q^u, Pf_\lambda) = E_q^u$ とおくと, PM での Morse 分解になる. Pf_1 および Pf_0

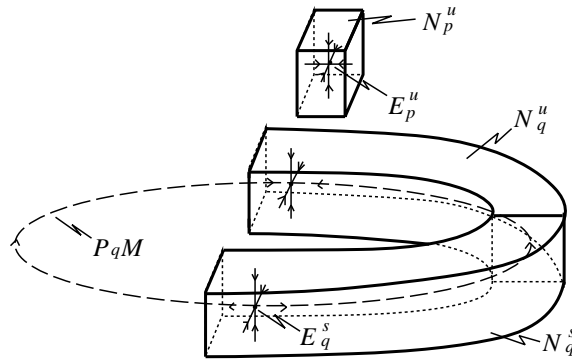


図 13: Pf_λ での孤立不変集合

による N_1 の像を図 14 に示す. 主張は, $\{E_p^u, E_q^s, E_q^u\}$ という Morse 分解が Λ 上連続するならば, ある $\lambda \in (0, 1)$ が存在して $W^u(p(\lambda))$ と $W^s(q(\lambda))$ が横断的でない交わりを持つということ, すなわち f_λ が heteroclinic 接触を持つということである. この Morse 分解が例 5.24 での Morse 分解と位相的に同じであることに注意すると, この主張は定理 6.5 により従う.

例 6.7 (homoclinic 接触). 図 15 で示される可微分同相写像の族 $\{g_\lambda\}$ を考える.

p および q が任意の $\lambda \in \Lambda$ で双曲型の不動点であり, 特に q は強安定方向 \tilde{E}_q^{ss} を持つとしよう. このとき命題 6.2 と同様にして $E_q^{ss} := p(\tilde{E}_q^{ss} \setminus 0)$ が孤立不変集合であることがわかる. 例 6.6 と同様に Morse 分解 $\{E_p^u, E_p^s, E_q^{ss}\}$ を考える. 図 16 に $\text{Inv}(N_p^u, Pg_\lambda) = E_p^u$, $\text{Inv}(N_p^s, Pg_\lambda) = E_p^s$ と $\text{Inv}(N_q^{ss}, Pg_\lambda) = E_q^{ss}$ を示す. N_p^u の Pg_0 および Pg_1 による像を図 17 に示す. ここでの主張は Morse 分解 $\{E_p^u, E_p^s, E_q^{ss}\}$ が Λ 上連続するならば, ある $\lambda \in (0, 1)$ が存在して p が非横断的な homoclinic 点を持つ, すなわち g_λ が homoclinic 接触を持つということである. この例での Morse 分解もやはり例 5.24 と位相的に同じなので, 主張は再び定理 6.5 により従う.

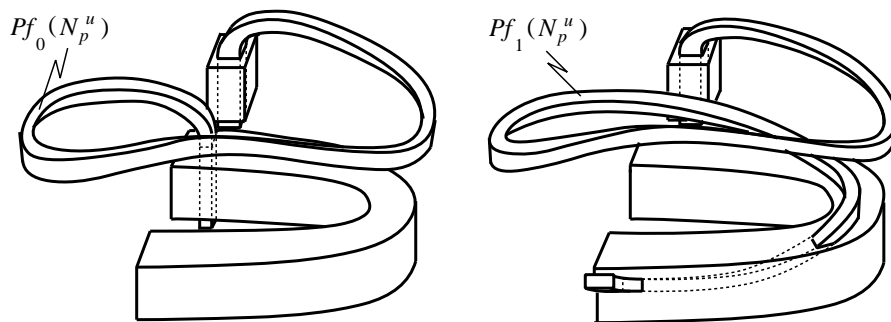


図 14: Pf_λ

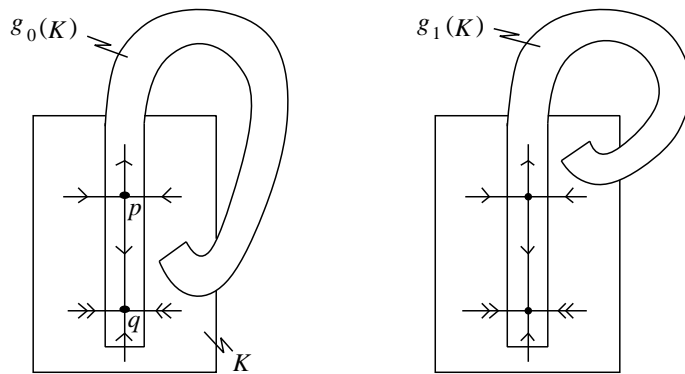


図 15: g_λ

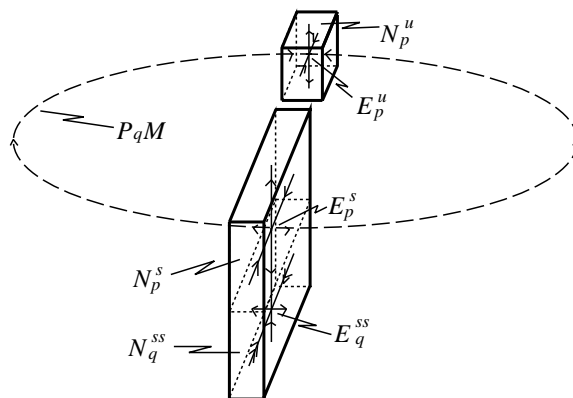


図 16: Pq_λ での孤立近傍

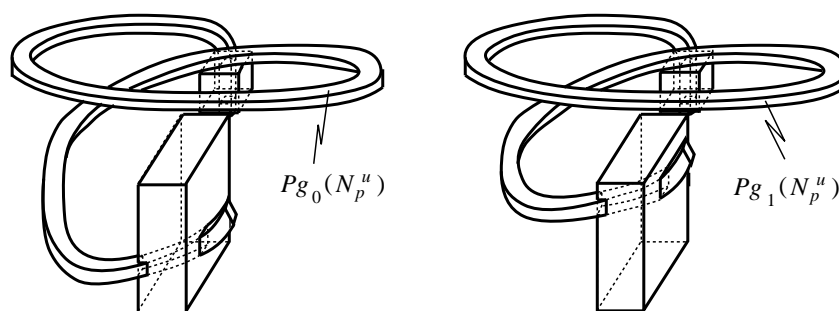


图 17: Pg_λ

参考文献

- [1] Z. Arai, Tangencies and the Conley index, preprint.
- [2] C. Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Lecture Notes **38** A.M.S. Providence, Rhode Island, 1978.
- [3] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer, Berlin, 1972.
- [4] R. W. Easton, Geometric methods for discrete dynamical systems, Oxford University Press, 1998.
- [5] J. Franks and D. Richeson, Shift equivalence and the Conley index, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3305-3322.
- [6] R. D. Franzosa, The Connection matrix theory for Morse decompositions, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), 561-592.
- [7] A. Granas, The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 209-228.
- [8] T. Kaczynski and M. Mrozek, Conley index for the discrete multi-valued dynamical systems, Topology Appl. **65** (1995), 83-96.
- [9] W. S. Massey, Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [10] C. K. McCord and K. Mischaikow, Connected simple systems, transition matrices and heteroclinic bifurcations, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 397-422.
- [11] C. K. McCord and K. Mischaikow, Equivalence of topological and singular transition matrices in the Conley index theory, Michigan Math. J. **42** (1995), 387-414.
- [12] K. Mischaikow and M. Mrozek, Conley index theory,
<http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/paperlist.html>
- [13] K. Mischaikow, Conley index theory: some recent developments, Springer, L.N.M. **1609** (1995), 119-207.

- [14] M. Mrozek, Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **318** (1990), 149–178.
- [15] M. Mrozek, The Conley index on compact ANR's is of finite type, *Results in Math.* **18** (1990), 306–313.
- [16] M. Mrozek, The Morse equation in Conley's index theory for homeomorphisms, *Topology Appl.*, **38** (1991), 45–60.
- [17] M. Mrozek, The shape index and other indices of Conley type for local maps on locally compact Hausdorff spaces, *Fund. Math.* **145** (1994), 15–37.
- [18] E. Pujals and M. Sambarino, homoclinic tangencies and hyperbolicity for surface diffeomorphisms: a conjecture of Palis, preprint 1998.
- [19] J. Reineck, Connecting orbits in one-parameter families of flows, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **8*** (1988), 353–374.
- [20] D. Richeson, Connection matrix pairs for discrete Conley index, preprint 1997.
- [21] D. Richeson, Connection matrix pairs for discrete Conley index, Thesis, Northwestern Univ., 1998.
- [22] D. Richeson, Connection matrix pairs, Conley index theory, 219–232, *Banach Center Publ.* **47**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1999.
- [23] J. W. Robbin and D. A. Salamon, Dynamical systems, shape theory and the Conley index, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **8*** (1988), 375–393.
- [24] J. W. Robbin and D. A. Salamon, Lyapunov maps, simplicial complexes and the Stone functor, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **12** (1992), 153–183.
- [25] D. A. Salamon, Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), 1–41.
- [26] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [27] A. Szymczak, The Conley index for the discrete semidynamical systems, *Topology Appl.* **66** (1996) 215–240.